ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Salvador Monroy Saldívar

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

DIRECTORIO

JOSÉ ENRIQUE VILLA RIVERA
Director General

EFRÉN PARADA ARIAS
Secretario General

YOLOXÓCHITL BUSTAMANTE DÍEZ
Secretaria Académica

JOSÉ MADRID FLORES Secretario de Extensión e Integración Social

Luis HUMBERTO FABILA CASTILLO
Secretario de Investigación y Posgrado

HÉCTOR MARTÍNEZ CASTUERA
Secretario de Servicios Educativos

MARIO ALBERTO RODRÍGUEZ CASAS
Secretario de Administración

Luis ANTONIO RÍOS CÁRDENAS
Secretario Técnico

Luis EDUARDO ZEDILLO PONCE DE LEÓN
Secretario Ejecutivo de la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas

JESÚS ORTIZ GUTIÉRREZ
Secretario Ejecutivo del Patronato de Obras e Instalaciones

FERNANDO SARIÑANA MÁRQUEZ
Director de XE-IPN TV Canal 11

Luis ALBERTO CORTÉS ORTIZ
Abogado General

ARTURO SALCIDO BELTRÁN
Director de Publicaciones

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Salvador Monroy Saldívar

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

—México—

La siguiente obra, *Estadística descriptiva*, aborda el desarrollo de conceptos y aplicaciones de acuerdo con el programa de la materia de estadística descriptiva del plan de estudios vigente en la Escuela Superior de Economía, del Instituto Politécnico Nacional.

Estadística descriptiva
Salvador Monroy Saldívar

Primera edición, 2008

Instituto Politécnico Nacional
Luis Enrique Erro s/n
Unidad profesional "Adolfo López Mateos"
Zacatenco, 07738, México, DF

Dirección de Publicaciones
Tresguerras 27, Centro Histórico
06040, México, DF

ISBN 978-970-36-0415-9

Impreso en México / Printed in México
http://www.publicaciones.ipn.mx

Para Salvador +
y Antonia +

A Mónica,
Fabián y Adrián

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, al Instituto Politécnico Nacional y a la Escuela Superior de Economía (ESE), por albergarme como académico y brindarme la oportunidad de contribuir, con mi quehacer cotidiano, a la formación educativa de jóvenes mexicanos dentro de esta gran labor noble e invaiuable, que el Instituto ha ejercido y llevado a cabo a lo largo de su existencia.

En segundo lugar, a los alumnos de la ESE quienes contribuyeron en gran medida a la realización de este trabajo; por supuesto á los profesores de la ESE, en especial, al Profr. Miguel Gutiérrez Gómez por su apoyo incondicional, también al Profr. José Felipe Padilla Díaz, quien fomentó en mí la idea de la creación de este libro, también no menos importante el reconocimiento a la Lie. Liliana García Nieto por su apoyo en la revisión de este material.

…El componente básico del conocimiento son los datos, que pueden ser símbolos, imágenes, números o sonidos.

Los datos no tienen un significado pero proveen la materia prima de donde se obtiene la información. Cuando relacionamos, interpretamos, organizamos y les damos significado y estructura a *esos datos con un propósito y relevancia, el resultado es lo que conocemos como información.*

Si a *esta información le agregamos razonamiento con experiencia y dentro de un contexto, el resultado es el conocimiento...*

PRÓLOGO

La enseñanza debería ser de tal naturaleza que
lo que se ofreciere se recibiera como un don valioso
y no como un penoso deber...

ALBERT EINSTEIN

El siguiente trabajo tiene como objetivo servir de apoyo teórico a los estudiantes de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional que cursan la materia de estadística descriptiva del plan de estudios vigente.

El libro se compone de seis capítulos que cubren el contenido de la materia. En el primero, se presenta una breve introducción a la estadística que incluye la definición de estadística, antecedentes históricos y ramas que la componen, así como la relación que existe entre la estadística y la economía, y, adicionalmente, algunos conceptos básicos imprescindibles para iniciar nuestro estudio.

En el segundo capítulo se presenta la descripción y medición de series de datos, se explica el uso del sigma en estadística, los distintos tipos de series de datos, por ejemplo: simples y compuestos, a partir de las cuales se muestra la aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión, asimetría y curtosis, por último, se estudia el teorema de Chebyshev y su importancia para la materia.

El capítulo tercero aborda el estudio de la probabilidad y comprende conceptos básicos, definiciones y aplicaciones; en el cuarto capítulo se tratan las distribuciones de probabilidad discretas como son: la distribución binomial, la bínomial generalizada, la hipergeométrica y la distribución de Poisson. En el capítulo quinto continuamos con el estudio de las distribuciones de probabilidad continuas tales como la distribución normal, normal estándar y la distribución "t" de *student.*

Finalmente, el último capítulo trata sobre el estudio de los números índices, son importantes y útiles sobre todo en el campo de la economía.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

No entiendes realmente algo a menos que seas capaz de explicarlo.

ALBERT EINSTEIN

Objetivos:

Al finalizar el capítulo el alumno será capaz de:

- Definir el concepto de estadística.
- Describir cuáles son las diferentes ramas de la estadística.
- Comprender la relación entre la economía y la estadística.
- Describir los conceptos de variable aleatoria, continua y dis creta, variable cuantitativa, cualitativa, población y muestras.

1.1 DEFINICIÓN DE ESTADÍSTICA

a. Murray y Spiegel[1]

La estadística estudia los métodos científicos para recoger, organizar, resumir y analizar datos así como para obtener conclusiones válidas y tomar decisiones razonables basadas en tal análisis.

b. Daniel Peña[2]

La estadística actual es el resultado de la unión de dos disciplinas que evolucionaron independientemente hasta confluir en el siglo xix: La primera es el cálculo de probabilidades que nace en el siglo XVII como teoría matemática de los juegos de azar. La segunda es la estadística (o ciencia del Estado, del latín *status),* que estudia la descripción de datos y tiene raíces más antiguas. La integración de ambas líneas del pensamiento da lugar a una ciencia que estudia cómo obtener conclusiones de la investigación empírica mediante el uso de modelos matemáticos.

c. Mendenhall[3]

La estadística es un área de la ciencia que se ocupa del diseño de experimentos o procedimientos de muestreo, del análisis de datos y de realizar inferencias acerca de una población de mediciones a partir de la información contenida en una muestra.

Murray y Spiegel, *Estadística,* McGraw-Hill, Serie Schaum, México, 1970. Daniel Peña Sánchez de Rivera, *Estadística modelos y métodos: 1. Fundamentos,* vol. 1, Alianza Universidad textos, México, 1972.
William Mendenhall, *Introducción a la probabilidad y la estadística,* Ed. Iberoamericana, México, 1987.

d. Deducción

La estadística es una rama de la ciencia matemática que se ocupa de organizar, resumir y analizar datos y, partiendo de ese análisis, realiza inferencias (deducciones) de una población a partir de la información contenida en una muestra. La estadística, en una etapa más avanzada, trata de obtener conclusiones válidas para la toma de decisiones en una investigación mediante el uso de modelos matemáticos, en economía recibe el nombre de econometría.

1.2 ANTECEDENTES HISTÓRICOS[4]

- En las pirámides de Egipto se encontraron pinturas que mues tran juegos de azar, provenientes de la primera dinastía (3500 a.n.e.).
- Los dados más antiguos que se han encontrado se remontan a unos 3000 años a.n.e., y se utilizaron tanto en el juego como en ceremonias religiosas. Los oráculos, sacerdotes o pitonisas de Grecia y Roma, utilizaban la configuración resultante de tirar cuatro dados para predecir el futuro y revelar la voluntad favorable o desfavorable de los dioses.
- El cálculo de probabilidades se consolida como disciplina independiente en el periodo que transcurre desde la segunda mitad del siglo xvu hasta comienzos del siglo xvm. Durante el siglo xvm, el cálculo de probabilidades se extiende a problemas físicos y actuariales (seguros marítimos). El principal impulsor de su desarrollo durante ese periodo es el conjunto de proble mas de astronomía y física que surgen ligados a la contrastación empírica de la teoría de Newton (1642-1782).

[4] Daniel Peña Sánchez de Rivera, *op. cit.,* pp. 28-37.

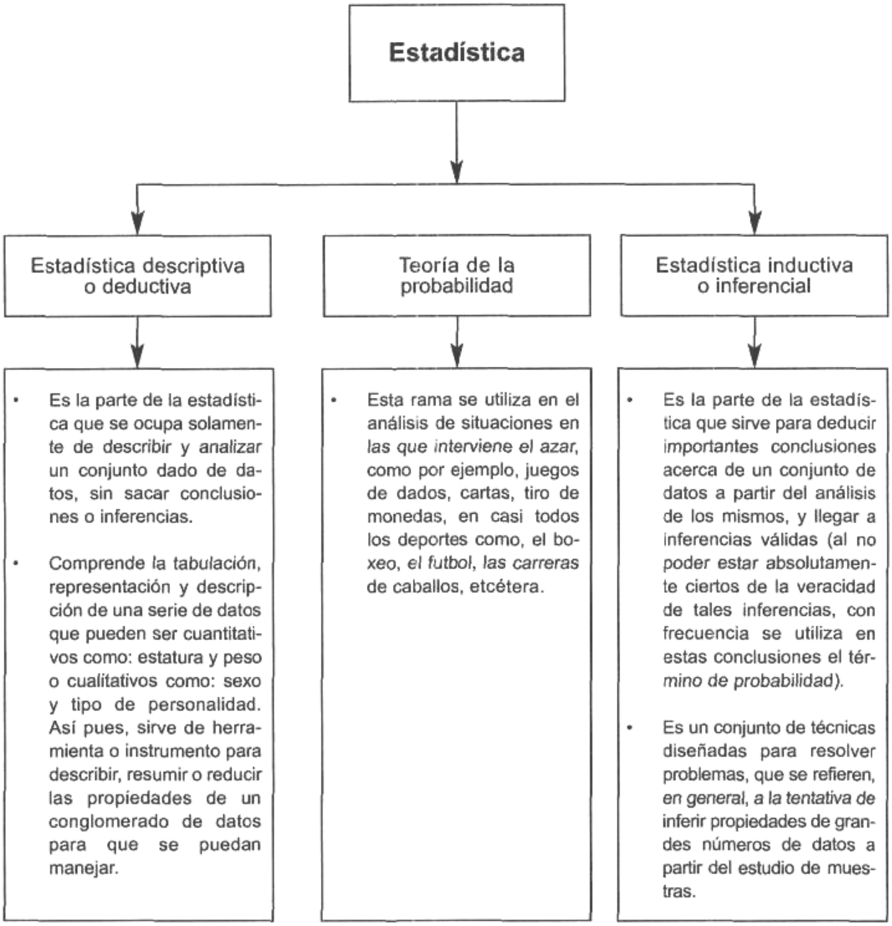
- D. Bernoulli (1700-1782) proporciona la primera solución al problema de estimar una cantidad desconocida a partir de un conjunto de mediciones de su valor que, por el error experi mental, presentan variabilidad.
- Otros importantes autores que contribuyen al desarrollo de la estadística son: Marqués de Laplace (1749-1827), Bravais (1846), geólogo y astrólogo Benjamín Pierce (1852).
- Por tanto, a mediados del siglo xix existen ya las herramientas básicas que van a dar lugar a la estadística actual. Sin embargo, la aplicación de estos principios se restringió a la física y la astro nomía con poca influencia sobre otras áreas del conocimiento.
- Paralelamente a este desarrollo de las herramientas estadísticas se daba el hecho de que desde la antigüedad los estados reco gían la información sobre la población y la riqueza que existía en sus dominios. Los censos romanos, los inventarios de Carlomagno sobre sus posesiones, etc., pueden considerarse pre cedentes de la institucionalización de la recolección de datos demográficos y económicos por los estados modernos.
- Durante el siglo xvm y la mayor parte del siglo xix, la estadísti ca evoluciona como ciencia separada del cálculo de probabi lidades y la teoría de errores, es decir, en este caso se refiere a la estadística que se dedicaba a la recolección de información.
- La revolución realizada en la física por Newton, se produjo en la biología por la obra de Darwin. El primero en resaltar la nece sidad de acudir a métodos estadísticos para contrastar la teoría de Darwin fue Francis Galton (1822-1911). Galton estudió exhaustivamente la distribución normal e introdujo el concepto de línea de regresión comparando las estaturas de padres e hijos.
- La solución de los problemas planteados por Galton y retomados por Weldon (1860-1906)[5] requería de métodos estadísticos más

[5] Weldon, W. R. F. (1860-1906), entonces catedrático de zoología en la Universidad de Londres aplica los métodos estadísticos a la biología animal.

avanzados que los existentes, razón por la cual, Weldon busca la colaboración de un matemático y filósofo: K. Pearson (1857-1936). La colaboración de estos autores y el apoyo de Galton constituyen el impulso generador de la corriente de contribuciones que dan fundamento a la estadística actual.

- El gran impulso se produce entre 1920 y el final de la Segunda Guerra Mundial, cuando se extiende la aplicación de los méto dos estadísticos en áreas tan diversas como la ingeniería, la físi ca, la antropología, la psicología y la medicina. La búsqueda de respuestas a las nuevas interrogantes planteadas por estas aplicaciones impulsan, a su vez, el desarrollo de nuevos méto dos estadísticos.
- Durante este periodo las aplicaciones de la estadística a la eco nomía conducen a una disciplina con contenido propio: la econometría.
- A partir de 1950 podemos considerar que comienza la época moderna de la estadística.

1.3 RAMAS DE LA ESTADÍSTICA[6]



Observación: Muchos autores dejan fuera la teoría de la probabilidad, dado que la consideran dentro de la inferencia estadística.

---

[6] Elaborado con base en: J. Williams, Stevenson, *Estadística para administración y economía,* Haría, México, 1981, pp. 3-9 y Gene, Glass V., *Métodos estadísticos aplicados a las ciencias sociales,* Prentice Hall, México, 1986, p. 3.

1.4 LA ESTADÍSTICA Y EL MÉTODO CIENTÍFICO

¿Qué es el método científico?

"Es un proceder ordenado y sujeto a ciertos principios o normas para llegar de una manera segura a un fin u objetivo que se ha determinado de antemano. Procura establecer firmemente los procedimientos que deben seguirse, el orden de las observaciones, experimentaciones, experiencias y razonamientos de los objetos a los cuales se aplica".[7]

En términos generales podemos decir que el método científico es un procedimiento que se aplica al ciclo completo de la investigación en la búsqueda de soluciones a cada problema del conocimiento; es un proceso que exige sistematización del pensamiento; es la manera ordenada de desarrollar el pensamiento reflexivo y la investigación.

Las tres ramas de la estadística utilizan el método científico que, adaptado a la estadística, consiste en cinco pasos básicos:

a. Definir cuidadosamente el problema. Asegurarse que esté claro el objeto de estudio.
b. Formular un plan para recopilar los datos necesarios.
c. Reunir los datos, recopilar la información.
d. Analizar e interpretar los mismos.
e. Anotar las conclusiones y otros descubrimientos de manera que sean fácilmente comprendidos por los que utilizan los resultados al tomar decisiones.

---

[7] Francisco H. de Canales, y otros, *Metodología de la investigación,* Limusa, México, 1986, p. 49.

1.5 LA ESTADÍSTICA, LA ECONOMÍA Y SU RELACIÓN CON LAS DEMÁS CIENCIAS

Cabe recordar que la estadística es un conjunto de técnicas y métodos empleados en la resolución de problemas por personas que no pueden considerarse únicamente como estadísticos o matemáticos.

En economía, por ejemplo, se utiliza la estadística por completo, como un valioso instrumento, ya que el sustento de todos los análisis económicos recaen en la manipulación y procesamiento de datos estadísticos. Las estadísticas se utilizan desde la etapa descriptiva hasta la de inferencia. En la descriptiva se elaboran estadísticas de población, nivel de ingreso, edad, etc., y la estadística inferencial se utiliza, por ejemplo, en la predicción del comportamiento de ciertas variables (probabilidad) hasta la creación de modelos económicos que tratan de explicar y predecir el comportamiento de toda la economía.

Respecto a otras ciencias, —si ya comprendimos que la estadística es una herramienta que nos permite cuantificar y manipular información para tratar de resolver diversos problemas,— es claro que su relación con ellas es la de una herramienta que pueden utilizar para manipular e interpretar los datos que son propios de sus áreas específicas.

1.6 ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS

Variable: Una variable puede ser cualquier cosa que se quiera estudiar y representar por un símbolo, tal como X, Y, H, x, b, y puede tomar un valor cualquiera de un conjunto determinado de ellos.[8]

Una variable es algo cuya magnitud puede cambiar, es decir, algo que puede tomar diferentes valores. Las variables que con frecuencia se

---

[8] Murray y Spiegel, *op. cit.,* p. 1.

utilizan en economía representan precios, beneficios, ingreso, costos, consumo, inversión, importaciones, exportaciones, etc. Puesto que cada variable puede asumir distintos valores, debe estar representada por un símbolo o una letra, por ejemplo Precio = P, Beneficio = II, Ingreso = Y, y así sucesivamente.[9]

Variable aleatoria: Si los valores numéricos que toma una variable provienen de factores fortuitos y si un determinado valor no se puede predecir exactamente con anticipación, esa variable se denomina aleatoria.[10]

Variable aleatoria discreta: Cuando los valores que puede tomar una variable están separados entre sí por una determinada cantidad, la variable se denomina discreta. Una característica de las variables discretas es la presencia de "vacíos" o "interrupciones" entre los valores que puede tomar. Por ejemplo, la cantidad de alumnos en un salón de clase[11] (es decir, no se puede tener 15.2, 17.4 o 25.3 alumnos, siempre tiene que ser un número entero). Esto quiere decir que las variables discretas casi siempre se refieren a valores enteros.

Variable aleatoria continua: Una variable continua es aquella que teóricamente puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo de valores. Otra forma de explicar sería decir que, sin importar qué tan cerca pueden estar dos valores para tomar una variable, siempre es posible, teóricamente, hallar otro valor de la variable que se pueda colocar entre ellos. Un ejemplo sería las estaturas de dos personas, en este caso es posible, teóricamente, encontrar a otra persona de la cual su estatura se encuentre entre las dos anteriores.[12]

---

[9] Alpha, Chiang, *Métodos fundamentales de economía matemática,* tercera edición, McGraw-Hill, México, 1987.

[10] W. Daniel, Wayne, *Estadística con aplicaciones a las ciencias sociales y a la educa ción,* McGraw-Hill, México, 1988, pp. 4-6.

[11] *ídem.*

[12] *ídem.*

Variable cuantitativa: Tanto los datos discretos como continuos se conocen como cuantitativos, ya que son inherentemente numéricos, es decir, ciertos valores numéricos se relacionan, de manera natural, con las variables que se miden.[13]

Se dice que una variable es cuantitativa siempre y cuando los valores que puede asumir sean los resultados de medidas numéricas. Ejemplos, la estatura, el peso, la temperatura, etcétera.[14]

Variable cualitativa: Hay muchos casos en donde no es posible hacer medidas numéricas. Muchas variables son susceptibles solamente de clasificación, por ejemplo, la variable "estado civil" puede recibir los valores de soltero, casado, divorciado, viudo y, tal vez, todos los demás. También se pueden asumir valores de orden como primero, segundo, tercero, etcétera.

Ejemplo global: La misma población puede dar origen a diferentes tipos de datos o clasificación de variables.

Población	**Continuos**	**Discretos**	**Cuantitativos**	**Cualitativos**
Clase de tercer grado	Edades, pesos	Núm. en el grupo	Niños / niñas	Género
Automóviles	K(h), K(l)	Núm. /defectos /auto	Colores	Más sucio
Venta de bienes raíces	Valores en $	Núm. de ofertas	Sobrevaluado	Más caro

[13] J. Williams Stevenson, *op. cit,* p. 16.
[14] W. Daniel Wayne, *op. cit.,* pp. 4-6.

Ejercicio (1.6.1): Identifique dentro de qué tipo de variable se pueden clasificar los siguientes datos:

a) 17 gramos; b) 25 segundos; c) 3 canastas; d) tallas de camisa; e) kilómetros por litro; f) más lento; g) 2 helados de vainilla.

Población: Es la totalidad de los elementos que conforman el universo de estudio. Es el conjunto de valores de una variable por el cual existe algún interés. Por ejemplo, si nos interesa la cantidad de alumnos que reprueban matemáticas en la ESE, la población son todos los alumnos de la ESE. Si nos interesa estudiar todos los automóviles nuevos que no tienen verificación, la población son todos los automóviles nuevos.

Cabe agregar que las poblaciones pueden ser finitas o infinitas: por ejemplo, la población consistente en todos los carros producidos en una fábrica en un día es finita, mientras que la población formada por todos los posibles sucesos "cara o cruz" en tiradas sucesivas de una moneda es infinita.

Muestra: Es una parte de una población. El tamaño completo de una población aun siendo finita, puede ser demasiado grande o también a veces no se puede estudiar toda, por cuestiones de costos y recursos. Por eso es necesario o conveniente examinar sólo una fracción (muestra) de la población.

Una muestra nos permite obtener información de una población a partir de la información que se deduce de la misma.

Finalmente, es conveniente mencionar que, en estadística, es muy importante diferenciar entre indicadores estadísticos de una muestra y de una población. Los estadísticos emplean letras latinas minúsculas para denotar estadísticas producto de una muestra; y letras griegas o latinas mayúsculas para representar parámetros de población. Ejemplo:

	Población	Muestra
Definición	Total de elementos considerados	Parte o proporción de la población seleccionada para su estudio
Características	"Parámetros"	"Estadísticos"
Letras	Tamaño de la población = N Media de la población = μ Varianza = σ^2 Desviación estándar = σ	Tamaño de la muestra = n Media de la muestra = x Varianza = s^2 Desviación estándar = s

Por ejemplo: Supongamos que la estatura promedio, de todos los alumnos de 6^{o} año de la República Mexicana, es de 152 cm. En este caso, 152 cm es una característica de la población de "todos los alumnos de sexto grado" y puede llamarse "parámetro de la población". Por otra parte, si decimos que la estatura promedio de la clase de sexto año de la maestra Cristina, en el D. R, es de 152 cm, estamos usando152 cm para describir una característica de la muestra "alumnos de sexto grado de la maestra Cristina". En este caso, 152 cm sería una estadística de muesta.

Si estamos convencidos de que la estatura promedio de los alumnos de sexto año de la maestra Cristina es una estimación exacta de la estatura promedio de los alumnos de ese nivel en toda la República Mexicana, podremos usar la estadística de muestra para estimar o inferir el parámetro de población "estatura media de los alumnos de sexto grado de la República Mexicana", sin tener que medir a todos los millones de alumnos que cursan el sexto año.

Es importante que el estudiante comprenda estas diferencias en cuanto a notación, ya que podrá entender cuando en algún ejercicio nos estemos refiriendo a datos de toda una población o únicamente de una muestra.

2. DESCRIPCIÓN Y MEDICIONES DE SERIES DE DATOS

Cuando puedes medir aquello de lo que hablas, expresarlo con números, sabes algo acerca de ello; pero cuando no lo puedes medir, cuando no lo puedes expresar con números, tu conocimiento es pobre e insatisfactorio: puede ser el principio del conocimiento, pero apenas has avanzado en tus pensamientos a la etapa de ciencia.

WILLIAM THOMSON KELVIN

Objetivos:

Al finalizar el capítulo el alumno será capaz de:

- Señalar las propiedades del operador sigma.
- Calcular e interpretar las medidas de tendencia central y de dis persión para series simples y compuestas.
- Realizar representaciones gráficas utilizando la computadora.
- Calcular los momentos respecto a la media así como la asime tría y la curtosis.
- Describir el Teorema de Tchebyshev y su interpretación.

2.1 SIMBOLOGÍA: NOTACIÓN Y USO DE LA SIGMA

En estadística con frecuencia es necesario calcular la suma de algún conjunto de números.

La letra griega *sigma,* representada por el símbolo $\sum$, se utiliza en estadística para denotar un conjunto de elementos que se desea sumar.

Para definir el conjunto de elementos que se quiere sumar con la *sigma,* también se usan letras o números que son colocados como subíndices o supraíndices en el símbolo de la sigma y que nos indican el primero y el último elemento que vamos a considerar en la suma.

Veamos algunas aplicaciones que tiene la *sigma* en estadística:

a. Si notamos que alguna variable estudiada puede tomar distintos valores, la podemos representar como x_i y a cada uno de sus valores como $X y$ x_2, x_{3l} y x_4, si a estas letras les asignáramos números, por ejemplo: 1, 5, 6 y 9, puede ser una cantidad muy grande, pero tomamos estos cuatro. Si queremos sumar los valores que toma la variable:

$$X_T + x_2 + x_3 + x_4 \Rightarrow 1 + 5 + 6 + 9$$

Si utilizamos la sigma:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1+5+6+9 = 21$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 21$$

El símbolo se lee: La suma de los valores de x cuando / va desde 1 hasta 4.

b. Otro ejemplo sería el de suponer que *n* números, multiplicados cada uno por 2, se desean sumar para obtener el resultado de los *n* productos, tendríamos que expresarlo de la siguiente forma:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_n$$

Aplicando algunas reglas de factorización podemos reducir la expresión:

$$2\ (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$$

y esta expresión, utilizando la sigma quedaría reducida a:

$$\sum_{i=1}^{n} 2x_i$$

la constante puede quedar fuera de la sigma y no altera el producto, la expresión final sería:

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

c. Tenemos otro caso cuando, por ejemplo, a cada uno de los valores que toma la variable hay que sumarle un número constante c, entonces, queda:

$$x_1 + c\ ,\ \ x_2 + c\ ,\ x_3 + c\ ,\ldots,\ x_n + c$$

Para sumar estos elementos tendríamos que realizar:

$$(x_1 + c) + (x_2 + c) + (x_3 + c) + \ldots + (x_n + c)$$

reordenando la expresión:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + (c + c + c + \ldots + c)$$

En este caso el conjunto de *xi* se puede abreviar y c la podemos expresar como el producto de *n:*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + c) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} c = \sum_{i=1}^{n} x_i + nc$$

Observación: Rara quienes no visualicen que la sumatoria de una constante c, es igual a *nc:* La operación de suma o sumatoria de una constante es igual al producto de la constante y el número de veces que se presenta. Ejemplo:

Sea la constante *c* - 5, y digamos que se repite seis veces, entonces:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = (6)5 = 30 \text{ o bien } \sum_{i=1}^{n} c_i = nc \; ; \; \sum_{i=1}^{6} 5_i = (6)5 = 30$$

d. Otra expresión de gran importancia es la suma de *n* números elevados al cuadrado separadamente, es decir, uno por uno, por ejemplo:

$$(x_1)\,(x_1)\;,\;(x_2)\,(x_2)\;,\;(x_3)\,(x_3)\;,\;\ldots\;,\;(x_n)\,(x_n)$$

La suma quedaría expresada de la siguiente forma:

$$(x_1)(x_1) + (x_2)(x_2) + (x_3)(x_3) + \ldots + (x_n)(x_n) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2$$

Utilizando la sigma se expresaría de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Y de modo semejante se puede realizar el caso de *n* números elevados al cubo cada uno y que también se requiera sumar:

$$(x_1)^3 + (\,x_2)^3 + \ldots + (x_n)^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3$$

e. Existe también la posibilidad donde se tiene que multiplicar el resultado de dos sumas, por ejemplo:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)\;\;(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$$

En estos casos el empleo de la sigma queda de la siguiente forma:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

f. Finalmente, existen varios ejemplos en que los datos se presentan en una tabla formada por renglones y columnas. En estos casos se utilizan los subíndices / y *j,* para identificar a cada uno de los elementos de la tabla donde / designa la fila y *j* la columna en donde se encuentra el elemento. Rara definir el tamaño de la tabla se utiliza *r*, que simboliza el número de filas y /cel número de columnas. Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} \\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij}
\end{array}$$

Donde: $i = 1,2,3,\ldots,n$ y $j = 1,2,3,\ldots,n$. Esta es una tabla de r_i filas por k_j columnas.

Si queremos localizar el elemento x_{23}, se lee: elemento x que se encuentra en la fila 2 columna 3.

En estos casos también se aplica la sigma o sumatoria, tanto en renglones como en columnas. Veamos un ejemplo:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\sum_{j=1}^{3} x_{1j}$
x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\sum_{j=1}^{3} x_{2j}$
x_{31}	x_{32}	x_{33}	$\sum_{j=1}^{3} x_{3j}$
$\sum_{i=1}^{3} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{3} x_{i2}$	$\sum_{i=1}^{3} x_{i3}$	$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$

Ejemplos numéricos de todos los casos:[15]

a. Si los valores de x_i son: 2, 4, 5 y 9, encuentre:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \quad ; \quad \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2$$

Respuesta:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 2+4+5+9 = 20$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 2^2+4^2+5^2+9^2 = 4+16+25+81 = 126$$

$$\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 = (2+4+5+9)^2 = (20)^2 = 400$$

b. Utilizando lo datos que se indican: 8, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 4, 5, 4, 1, calcule:

$$\sum_{i=1}^{2} x_i \quad ; \quad \sum_{i=2}^{4} x_i \quad ; \quad \sum_{i=7}^{11} x_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{11} x_i$$

Respuestas:

$$\sum_{i=1}^{2} x_i = 8+2 = 10$$

[15] Es muy importante entender que antes de hacer cualquier operación con los datos se deben ordenar los valores de la serie de menor a mayor.

$$\sum_{i=2}^{4} x_i = 2+3+6=11$$

$$\sum_{i=7}^{11} x_i = 9+4+5+4+1=23$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i = 57$$

c. Utilizando los siguientes datos: f, -(1,5, 7, 3, 3) y x,- = (2, 3, 2, 4, 3). Calcule las siguientes sumas:

$$\sum_{i=1}^{5} f_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{5} x_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{5} f_i x_i^2 \quad ; \quad \left(\sum_{i=1}^{5} f_i x_i\right)^2$$

Respuesta:

f_i	x_i	$(x_i)^2$	$f_i x_i$	$(f_i)(x_i)^2$
1	2	4	2	4
5	3	9	15	45
7	2	4	14	28
3	4	16	12	48
3	3	9	9	27
19	14	42	52	152

$$\left(\sum_{i=1}^{5} f_i x_i\right)^2 = 52^2 = 2704$$

d. Ejercicios (2.1.1):

Escriba las siguientes sumas utilizando la sigma:

i. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

ii. $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$

iii. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

iv. $\left[(0_1 - e_1)^2 / e_1\right] + \left[(0_2 - e_2)^2 / e_2\right] + \left[(0_3 - e_3)^2 / e_3\right] + \left[(0_4 - e_4)^2 / e_4\right]$

Con los siguientes datos: 15, 10, 5, 9, 14, 20, 6, 17, calcule:

Nota: recuerde que hay que ordenar los datos antes de hacer algún cálculo.

a) $\sum_{i=1}^{8} y_i$; b) $\sum_{i=1}^{8} y_i^2$

c) $\left(\sum_{i=1}^{4} y_i\right)^2$; d) $\sum_{i=1}^{5} y_i - 12$

e) $\left(\sum_{i=1}^{5} y_i - 12\right)^2$

Calcule las siguientes cantidades utilizando la información de la tabla que se presenta:

8	7	5	9
4	0	10	2

a) $\sum_{i=1}^{2} x_{i1}$; b) $\sum_{j=1}^{4} x_{1j}$; c) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}$; d) $\sum_{j=2}^{3} x_{2j}$

2.2 SERIES SIMPLES Y COMPUESTAS: SERIES SIMPLES, SERIES DE FRECUENCIA Y SERIES DE CLASES Y FRECUENCIA

Serie estadística: Es un conjunto de números o términos que miden las variaciones de un fenómeno.[16] Ejemplo: asistencia de alumnos a clases durante cinco días. El número de viviendas del D.F., en los últimos cinco años, etcétera.

2.2.1 Serie simple

Es el conjunto de números que miden las variaciones (de una característica) de los fenómenos particulares que forman un grupo.

Ejemplo: suponga que se midieron las estaturas de 20 personas y se obtuvieron los siguientes resultados:

1.54	1.61	1.67	1.72
1.54	1.61	1.67	1.81
1.54	1.61	1.67	1.81
1.57	1.61	1.67	1.81
1.57	1.67	1.72	1.85

El conjunto de estos números que resulta de la medida de las estaturas de las 20 personas reciben el nombre de serie simple.

En este ejemplo la cantidad de datos es pequeña, pero cuando el número de datos es muy grande poco podemos deducir con la serie simple de las características del fenómeno.

Si observamos en este caso, podemos llegar a la conclusión de que tres personas miden 1.54 m, dos 1.57 m, cuatro 1.61 m, cinco 1.67 m, dos 1.72 m, tres 1.81 m y sólo una mide 1.85 metros.

---

[16] Andrés García Pérez, *Elementos de método estadístico,* UNAM, México, 1978, pp. 21.

2.2.2 Serie de frecuencias

Se refiere al número de veces que un valor o término se repite en una serie simple, es decir, qué tan frecuente es ese dato en la serie.

Ejemplo: (tomemos los datos y las conclusiones del ejercicio anterior). En este caso existen tres en la frecuencia del término 1.54 m, dos personas con una altura de 1.57 m, es decir, dos es la frecuencia con que se presenta el término 1.57 m, cuatro la de 1.61 m, cinco la de 1.67 m, dos la de 1.72 m, tres la de 1.81 m y sólo una la dé 1.85 metros.

Así como la serie simple, las frecuencias acumuladas de esa serie se pueden presentar mediante una tabla que permite la observación del fenómeno con claridad y se representa de la siguiente forma: se utiliza también una columna auxiliar llamada "conteo por marcas":[17]

Estaturas (metros)	Conteo por marcas tarjado	Núm. de personas (frecuencias)
1.54	III	3
1.57	II	2
1.61	IIII	4
1.67	~~IIII~~	5
1.72	II	2
1.81	III	3
1.85	I	1
		20

El conjunto de números de este cuadro recibe el nombre de serie de frecuencias, (frecuencias de la serie).

[17] El "conteo por marcas" no es otra cosa más que la de agregar una columna donde se realice el tarjado o anotación de las marcas correspondientes que permita anotar un palito por cada dato que se encuentre dentro del rango o la clase para después en otra columna anotar el conteo con número de las frecuencias que se encuentran en la clase.

Por último, cabe mencionar que la suma de las frecuencias es igual al número de los términos de la serie simple. Esto resulta fácil de entender si se comprende que las frecuencias son únicamente la agrupación de los términos iguales de la serie, lo cual no modifica en nada la cantidad original o total.

2.2.3 Serie de clases y frecuencias

Si tuviéramos un número muy grande de observaciones de un hecho cualquiera, por ejemplo, las alturas de 500 estudiantes de la ESE del IPN, en este caso primero tendríamos la serie simple (los 500 datos), pero para trabajar la información con mayor facilidad formaríamos una tabla de frecuencias, pero si aun así los datos fueran muchos, procederíamos a tratar de compactar más la información y esto lo haríamos formando grupos o intervalos de clase como se conocen en estadística. Por lo tanto, sólo nos resta definir lo que se entiende por clase en estadística.

Clase: Se define como ciertos grupos o intervalos en los que se reúnen o concentran las frecuencias observadas de la serie.

Retomando el ejercicio anterior tenemos la tabla de frecuencias:

Estaturas (metros)	Conteo por marcas tarjado	Núm. de personas (frecuencias)
1.54	III	3
1.57	II	2
1.61	IIII	4
1.67	~~IIII~~	5
1.72	II	2
1.81	III	3
1.85	I	1
		20

Arbitrariamente o por alguna razón, podemos decidir formar grupos o clases, cuyos intervalos sean cada 10 cm, la amplitud y el número de intervalos se calculan aplicando algunos criterios que veremos más adelante.

Procedemos a formar nuestra tabla de clases y frecuencias con base en los datos del ejercicio que hemos venido trabajando:

Tabla de clases y frecuencias

Estaturas (clases)	Conteo por marcas tarjado	Núm. de personas (frecuencias)
1.50-1.59	~~IIII~~	5
1.60-1.69	IIII ~~IIII~~	9
1.70-1.79	II	2
1.80-1.89	IIII	4
		20

El conjunto de los números del cuadro anterior recibe el nombre de TABLA DE CLASES Y FRECUENCIAS. Esta forma de presentación de los datos nos proporciona información importante del fenómeno.

Partiendo de esta primera explicación de las series de clases y frecuencias, profundizaremos un poco más debido a la importancia que tienen en estadística.

Formalizando: Los pasos principales en la elaboración de una distribución de clases y frecuencias para datos de una muestra, son los siguientes:

a. Establecer los **intervalos de clase** en los que se agruparán los datos.
b. Ordenarlos en clases mediante "conteo por marcas".
c. Contar el número de frecuencias de cada clase y anotarlo.
d. Presentar los resultados en una tabla.

Para establecer los **intervalos de clase** de la serie son necesarios los siguientes pasos:

i. Determinar la amplitud de variación de los datos (también llamada recorrido de la variable): que es uno, más la diferencia entre la mayor y menor de las puntuaciones, algunos autores no suman el uno a la diferencia.

$$Av = 1 + (\text{puntuación mayor - puntuación menor})$$

ii. Decidir el número de clases o intervalos: algunos autores dicen que el criterio es utilizar entre 5 y 20, otros que entre 12 y 15 y algunos más que entre 5 y 15, los argumentos son diversos pero aún no se ponen de acuerdo.

Una aproximación empírica la podemos obtener de $\sqrt{n}$, en donde n = número de datos, por ejemplo: $\sqrt{n} = \sqrt{400} = 20$, intervalos, $\sqrt{40} = 6.32 \approx 6$, siempre se debe redondear el resultado en un número entero.

$$Nc = \sqrt{n}$$

Otro criterio sería la decisión individual de cada investigador con base en su experiencia o su criterio.

iii. Calcular la amplitud o tamaño de cada clase: dividir la amplitud de variación de los datos entre el número de clases; se tiene que dividir entre el número de clases ya redondeado.

$$Tc = Av \,/\, Nc$$

iv. Efectuar la tabulación o determinación de los límites (fronteras) de clases. Se debe comenzar por el primer intervalo estando seguros que incluye a la mínima de las observaciones y después se agregarán los demás intervalos. Es importante que las clases se encuentren cercanas entre sí, de manera que no haya vacíos considerables, es decir, que entre cada una de las clases no se encuentre ningún valor, de lo contrario sería difícil decidir a cuál pertenece.

Los números que limitan una clase se denominan fronteras o límites de clase; siendo el número menor la frontera inferior de la clase y el número mayor, la frontera superior. Por ejemplo, la frontera inferior de la tercera clase de nuestra observación anterior, la que hemos trabajado es de 1.70 m, y la frontera superior es de 1.79 metros.

La diferencia que existe entre la frontera superior y la inferior (más uno), de una clase recibe el nombre de amplitud de intervalo de clase o tamaño de clase. En nuestro problema la amplitud de cada una de las clases es de 10 cm, por ejemplo, tomando la tercera clase: (1.79-1.70)+1 = 10 centímetros.

Por último, también a la frontera inferior de la primera clase se le denomina frontera inferior de la serie, en el ejemplo sería 1.50 m y la frontera superior de la última clase recibe el nombre de frontera superior de la serie, en el ejemplo sería 1.89.

Veamos un ejemplo siguiendo todos los pasos mencionados: Utilizando la siguiente serie simple de datos referentes a las edades de 32 personas, construya una serie de clases y frecuencias aplicando los cuatro pasos:

57	54	49	6
65	57	62	5
55	46	61	5
61	51	51	5
52	58	43	5
51	54	54	6
57	60	47	4
56	57	55	5

a. Establecer los **intervalos de clase** en los que se agruparán los datos con los cuatro pasos:

Lo primero que tenemos que hacer es ordenar los valores de menor a mayor y construir una serie de frecuencias que servirá para elaborar la serie de clases y frecuencias, utilizaremos también la marca de clase para recalcar que es útil, aunque sean pocos datos, realmente es muy útil cuando se trata de muchos valores:

Xi	Conteo por marcas tarjado	*Fi*
43	I	1
46	I	1
47	I	1
49	II	2
51	IIII	4
52	I	1
54	IIII	4
55	IIII	4

continúa…

Xi	Conteo por marcas tarjado	*Fi*
56	II	2
57	IIII	4
58	I	1
60	I	1
61	IIII	3
62	I	1
65	I	1
68	I	1
		32

Ahora sí podemos aplicar los cuatro pasos:

i. Determinar la amplitud de variación de los datos:

$$Av = 1 + (68 - 43) = 26$$

ii. Decidir el número de clases o intervalos:

$$\text{Nc} = \sqrt{32} = 5.7 \approx 6$$

Es importante mencionar que cuando tenemos un resultado no entero debemos redondear al entero inmediato superior nunca al inferior; en este caso el 5.7 lo redondeamos a 6 y ese será el número aproximado de clases a formar.

iii. Calcular la amplitud o tamaño de cada clase:

$$\text{Tc} = 26 / 6 = 4.333 \approx 5$$

El tamaño de cada clase será de cinco elementos.[18] Recordemos que el valor inicial se considera como el primer dato, por ejemplo, el primer intervalo va de 43 a 47, ya que el 43 es el primer valor, el 44 el segundo, el 45 el tercero, el 46 el cuarto y el 47 el quinto, así entonces, pasaremos al último paso.

---

[18] Podemos ver que si consideramos las reglas de redondeo, en realidad el valor correcto sería de 4, pero como en estos casos nos estamos refiriendo al tamaño de cada clase, si los dejamos en 4 podemos correr el riesgo que al final tengamos que formar una clase más por los 0.333 que dejamos fuera en cada clase, claro eso no sería malo, pero para mayor exactitud lo dejaremos en 5, si tiene tiempo y deseos, el lector podría hacer la prueba con intervalos de 4 y verá que el total de clases es de 7 y no de 6 como se planteó.

iv. Efectuar la tabulación o determinación de los límites o fronteras de clases:

Clases	*Fi*
43-47	3
48-52	7
53-57	14
58-62	6
63-67	1
68-72	1
	32

Es importante mencionar la existencia de tablas de clases y frecuencias abiertas en su extremo inferior, superior o ambos.

Se dice que una serie de clases y frecuencias es abierta en su extremo inferior cuando se desconoce la frontera inferior de su primera clase, por ejemplo:

Edades años	Núm. de alumnos (frecuencias)
Menores de 10	2
de 10 a 12	4
de 12 a 14	3
de 14 a 16	9
	18

Observación: en este caso los intervalos se tienen que entender: el primero como valores menores de 10 años, el segundo de 10 años a menores de 12, el tercero de 12 a menores de 14 y el último de 14 a menores de 16.

Una serie de clases y frecuencias es abierta en su extremo superior cuando se ignora la frontera superior de la última clase, por ejemplo:

Edades años	Núm. de alumnos (frecuencias)
de 8 a <10	2
de 10 a <12	4
de 12 a <14	3
mayores de 14	9
	Suma = 18

El caso en donde se encuentre abierta por los dos extremos ya se puede deducir fácilmente.

Finalmente, mencionaremos el concepto de *marca de clase* que se refiere a la suma de los límites inferior y superior de la clase y el resultado se divide entre dos. Así la marca de clase del intervalo 1.50 m a 1.59 m es (1.50+1.59)/2 = 1.545. La marca de clase se llama también *punto medio de la clase.*

Ejercicio (2.2.1):[19]

Las puntuaciones finales obtenidas en matemáticas por 80 estudiantes de economía se registran en la siguiente tabla:

68	73	61	66	96	79	65	8
84	79	65	78	78	62	80	6
75	88	75	82	89	67	73	7
82	73	87	75	61	97	57	8
68	60	74	94	75	78	88	7
90	93	62	77	95	85	78	6
'62	71	95	69	60	76	62	7
88	59	78	74	79	65	76	7
76	85	63	68	83	71	53	8
93	75	72	60	71	75	74	7
							7

19 Tomado de Spiegel Murray R., *op. c¡t,* p. 32.

a. A partir de la serie simple, construir la serie o tabla de frecuencias aplicando el método de conteo por marcas.
b. Construir la serie o tabla de clases y frecuencias siguiendo los cua tro pasos básicos:

   i. Determinar la amplitud de variación de los datos.
   ii. Decidir el número de clases o intervalos que se van a formar utilizando el método de raíz cuadrada y redondear a un número entero.
   iii. Calcular la amplitud o tamaño de cada clase.
   iv. Efectuar la tabulación.

c. Mencionar cuáles son las fronteras de la segunda clase.
d. Mencionar cuál es la amplitud de la primera clase; la amplitud de clase se calcula igual que la amplitud de variación, sólo que se apli ca a un solo intervalo y no a toda la serie.
e. Mencionar cuáles son las fronteras de la serie.
f. Calcular la marca de clase o punto medio de la segunda clase.

Ejercicio (2.2.2):

En la siguiente tabla encontramos las estaturas de 40 estudiantes, expresadas en centímetros:

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

Para este ejercicio se piden los mismos puntos que el ejercicio anterior.

2.3 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL: MEDIA, MODA, MEDIANA Y OTRAS MEDIDAS (MEDIA GEOMÉTRICA, DECILES, CUARTILES Y PERCENTILES[20])

Una medida de tendencia central es un único valor que indica el centro de una serie de números a partir de los cuales se calcula. Implica entender el concepto de **promedio:** es un valor típico o representativo de un conjunto de datos; como tales valores tienden a situarse en el centro del conjunto de datos ordenados según su magnitud, los promedios se conocen también como medidas de centralización, las más comunes son **la media aritmética o media, la mediana, la moda, la media geométrica y la media armónica.**

Ahora estudiaremos cada una de ellas recordando que existe un procedimiento que se aplica a cada una dependiendo del tipo de serie que nos refiramos, es decir, simple, de frecuencias o de clases y frecuencias.

Media o media aritmética: Se refiere a la medida de tendencia central que tiene en mente una persona común y corriente cuando se habla de "promedio" y se representa por x (léase, x barra).

2.3.1 Media o media aritmética para una serie simple

La media se calcula sumando los valores de la serie, de los cuales se desea obtener el promedio, y dividiendo el resultado entre el número de datos que se consideran en la suma. Por ejemplo si consideramos una variable aleatoria *X,* de la cual se han tomado *n* medidas x1, x2, ..., x_n. La media de las *n* medidas se encuentra de la siguiente manera:

[20] En algunos libros se menciona que el nombre correcto no es percentiles sino centiles, ya que el concepto de percentiles tiene implícito el aspecto de porcentaje y la medida de centiles no se refiere a un porcentaje, es únicamente un lugar dentro de 100 pero no un porcentaje. En este caso considero que es más correcto también el concepto de centil.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Si aplicamos la sumatoria, la expresión queda de la siguiente forma:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Ejemplo: Calcule la media aritmética de los números 8, 3, 5 12 y 10.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{8+3+5+12+10}{5} = \frac{38}{5} = 7.6$$

$$\overline{x} = 7.6$$

2.3.2 Media o media aritmética para una serie de frecuencias

Para una serie de datos organizados por frecuencias la media se tiene que calcular de la siguiente manera:

Si nos encontramos con un conjunto de valores representados por x_1; x_2, ..., x_n, los cuales tienen las frecuencias *f^*, f_2, ... , f_{ni} respectivamente, la media aritmética se calcularía de la siguiente forma:

$$\overline{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}$$

$n = \sum f_i = \text{a}$ la suma de las frecuencias, es decir, el número total

Donde:
de datos.

Ejemplo: Si los valores 2, 5, 6 y 8, se presentan con frecuencias 4, 1, 3 y 4 respectivamente, calcule la media aritmética:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n} = \frac{(2)(4)+(5)(1)+(6)(3)+(8)(4)}{4+1+3+4} = \frac{8+5+18+32}{12} = \frac{63}{12} = 5.25$$

$$\overline{x} = 5.25$$

2.3.3 *Media aritmética para datos agrupados (series de clases y frecuencias)*

Cuando los datos se presentan mediante una distribución de clases y frecuencias todos los valores caen dentro de unos intervalos de clase dados, en estos casos hay que considerar el promedio de cada uno y por lo tanto se utiliza la "marca de clase" o punto medio de cada intervalo que podemos representar con la letra *y* (gamma).

Por ejemplo, si nos encontramos con las frecuencias *fy* f_2, ... , f_n, y las marcas de clase y_v y_2, ••-, *ln* previamente calculadas, respectivamente, la media aritmética se calcularía de la siguiente forma:

$$\overline{x} = \frac{f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2 + \cdots + f_n\gamma_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\gamma_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\gamma_i}{n}$$

Donde:

$n = \sum f_i =$ a la suma de las frecuencias, es decir, el número total de datos.

Ejemplo: Encontrar la altura media de los estudiantes que se presentan en la siguiente tabla:

Altura (pulgadas)	Frecuencia (f_i)	Marca de clase(γ_i)	(f_i) (γ_i)
60-62	5	61	305
63-65	18	64	1 152
66-68	42	67	2 814
69-71	27	70	1 890
72-74	8	73	584
	100		6 745

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \gamma_i}{n} = \frac{6\ 745}{100} = 67.45 \text{pulgadas}$$

Existe otro camino para llegar al mismo resultado a través de las diferencias o desviaciones (este método se puede aplicar a cualquiera de los tipos de series que hemos visto). Es conocido como el método largo para calcular la media, y se aplica de la siguiente forma: se toma una marca de clase cualquiera, denotada por la letra mayúscula *A* y $d_i = y_i - A$, que se refieren a las desviaciones de los valores de y_i con respecto de *A.* La fórmula que se aplica es la siguiente:

$$\overline{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{n}$$

Utilizando este método calculamos la media del problema anterior:

	Marca de clase (β_i)	Desviaciones $d_i = \gamma_i - A$	Frecuencia (f_i)	(f_i) (d_{ii})
	61	-6	5	-30
	64	-3	18	-54
$A =$	67	0	42	0
	70	3	27	81
	73	6	8	48
			100	45

$$\overline{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{n} = 67 + \frac{45}{100} = 67.45$$

Nota: La suma algebraica de las desviaciones de un conjunto de valores con respecto a su media es siempre cero.

Ejercicio (2.3.1): Calcular la media aritmética del ejercicio de las estaturas de los 40 estudiantes (2.2.2).

2.3.4 Mediana

La segunda medida de tendencia central de un conjunto de números es la mediana. Su característica principal es que divide un conjunto de valores ordenados en dos grupos iguales; la mitad de los números tendrá valores que son menores que la mediana y la otra mitad alcanzará valores mayores y se representa por las letras *Md.*

2.3.5 La mediana para una serie simple y de frecuencias

Para encontrar la mediana primero es necesario ordenar los valores (generalmente), de menor a mayor. Posteriormente se deberá separar la mitad de los valores para obtener la mediana.

En resumen podemos decir que el procedimiento para obtener la mediana es el siguiente:

a. Ordenar o clasificar los valores de mayor a menor o de menor a mayor.
b. Contar para saber si existe un número de valores par o impar.
c. En caso de que se tenga un número impar de valores, la mediana es el valor central. En cambio para un número par de valores, la media na es el promedio de los valores centrales.

d. La posición de la mediana se determina con la fórmula (n + 1)/2. (esta fórmula determina la posición de la mediana pero no su valor; ése se obtiene al encontrar la posición de la mediana).

Ejemplo 1: Encontrar la mediana del grupo 5, 6 y 8. Primero definimos la posición de la mediana con la fórmula (n + 1)/2, por tanto, para tres valores, el lugar donde se encuentra la mediana es: (3 + 1)/2 = 2, o sea en la segunda posición de la serie que corresponde al valor de 6.

Ejemplo 2: Obtener la mediana de los siguientes valores 7, 8, 9 y 10. Siguiendo la fórmula la mediana ocupa el lugar (4+1)/2 = 2.5, que se encuentra entre los dos valores intermedios, o sea entre 8 y 9 y, en este caso, la mediana es igual al valor intermedio de los dos valores, es decir, (8+9)/2 = 8.5. Este resultado deja dos valores menores y dos mayores o dicho de otra forma, divide a la serie en dos partes ¡guales.

Ejercicios (2.3.2): Encontrar el lugar y el valor de la mediana de las siguientes series:

Series simples:

a. 2, 3, 3, 4
b. 1, 18, 19, 20
c. 5.1, 6.5, 8.1, 9.1, 10.1, 15.5
d. 1, 2, 3, 3, 3, 4, 7
e. 9, 40, 80, 81, 100
f. 3.7, 9.2, 10.1, 11.8, 12.8

g) de frecuencias:

xi	*Fi*
5	3
8	2
6	4
2	1

Respuestas; sólo se refieren al valor de la mediana, no a su lugar: a) 3, b) 18.5, c) 8.6, d) 3, e) 80, f) 10.1, g) 6. (ojo: en g, el orden).

2.3.6 La mediana para una serie de clases y frecuencias

Para datos agrupados en clases y frecuencias, la mediana se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$Md = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - \left(\sum f\right)_i}{f_{mediana}} \right) c$$

Donde: L_i - Límite real inferior de la clase mediana, es decir, la clase que contiene la mediana. *n* - Número total de datos, es decir, la frecuencia total.

$\left(\sum f\right)_i$ = Suma de las frecuencias de todas las clases menores a la clase que contiene la mediana.

¡mediana = frecuencias de la clase que contienen la mediana, c = tamaño del intervalo de la clase mediana, es decir, la amplitud del intervalo.

Observación: en este tipo de series también se aplica la fórmula de (n + 1)/2, para saber el lugar donde se encuentra la mediana y después se aplica la fórmula para saber exactamente el valor de la mediana.

Ejemplo: hallar la mediana de las estaturas de los 40 estudiantes a partir de la siguiente distribución de clases y frecuencias:

Estaturas cm	Frecuencias (f_i)
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2
	40

El problema se puede resolver por dos métodos:[21]

Método 1: mediante interpolación: Los pesos que se muestran en la tabla de frecuencias se supone que se distribuyen en forma continua. En este caso, la mediana es aquel peso que corresponde a la mitad de la frecuencia total (40/2 = 20),[22] es decir, que deja a la mitad de las frecuencias por arriba y la mitad por abajo.

La suma de las frecuencias de las tres primeras clases es 3+5+9 = 17. Para llegar al valor deseado de 20 necesitamos tres elementos más que tomaremos de los 12 casos que se encuentran en la cuarta clase. Puesto que el intervalo de la cuarta clase es 145-153, realmente corresponde a los pesos 144.5 a 153.5;[23] la mediana estará a 3/12 del camino entre 144.5-153.5; la mediana es entonces:

$$144.5+\frac{3}{12}(153.5-144.5)=144.5+\frac{3}{12}(9)=146.8 \quad \text{cm}$$

Método 2: mediante fórmula: Si nosotros aplicamos la fórmula para saber el lugar[24] en donde se encuentra la mediana, tenemos que (40+1)2 = 20.5, es decir, el valor de la mediana se encuentra entre el lugar 20 y 21 de la serie. Puesto que la suma de las frecuencias de las

---

[21] Para los fines de clase se puede exponer sólo el segundo para no saturar al alumno.

[22] Nótese que en el cálculo del lugar donde se encuentra la mediana no se aplicó la fór mula tradicional de (n+1)/2, pero bajo este método se calculaba ese valor.

[23] Existen muchos autores que mencionan el manejo de intervalos reales, y dicen que para considerar el intervalo real se tiene que descontar medio punto al límite superior y medio punto al límite inferior de la clase, esto para garantizar que ningún posible valor muy cercano al límite quede fuera de la muestra. Es por esta razón que los límites de esta clase se definen con medio punto menos y medio punto más en su límite inferior y superior.

[24] Es muy importante remarcar que el primer paso es aplicar la fórmula (r?+1)/2, para saber el lugar de la mediana y después aplicamos la fórmula para calcular el valor de la *Md.*

tres y cuatro primeras clases son respectivamente 3+5+9 = 17 y 3+5+9+12 = 29, está claro que la mediana se encuentra en la cuarta clase (que es donde se encuentran los lugares 20 y 21), y que será, por tanto, la clase donde se encuentra la mediana. Con esta información podemos encontrar los valores que requerimos para aplicar la fórmula:

L_i = Límite real inferior de la clase mediana = 144.5

n = Número total de datos = 40

$\left(\sum f\right)_i$ = Suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase mediana = 3+5+9 = 17

$f_{mediana}$ = Frecuencia de la clase que contiene la mediana = 12

c = Tamaño del intervalo de la clase mediana (es decir, la amplitud del intervalo) = (mayor - menor)+1 = (153-145)+1= 9

Entonces: (sustituimos los valores en la fórmula)

$$L_i + \left(\frac{n/2 - \left(\sum f\right)_i}{f_{mediana}}\right) c \ = 144.5 + \left(\frac{40/2 - 17}{12}\right)(9) = 146.8 \text{ cm}$$

Interpretación: Podemos decir que el valor que divide a la serie en dos parte iguales es 146.8 cm, la mitad de los números tendrá valores que son menores que la mediana y la otra mitad alcanzará valores mayores que la mediana.

La moda: La tercera medida de tendencia central, fácilmente obtenible, es la moda, ya que es el valor que se repite con mayor frecuencia en un conjunto de puntuaciones y se representa por *Mo.*

2.3.7 La moda para series simples y de frecuencias

En este caso, encontrar la moda en series de simples y de frecuencia, resulta muy sencillo, ya que, como ya se mencionó, únicamente basta con encontrar el valor que mayor número de veces se repite en la serie, ya sea simple o de frecuencias (no se tiene que hacer ningún cálculo ni se aplica ninguna fórmula). Es importante mencionar que no todos los conjuntos de puntuaciones tienen una moda, a veces no existe la moda y en otras pueden existir más de una.

Veamos algunos ejemplos de casos posibles de la moda:

a. Si tenemos las siguientes puntuaciones: 2, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 10, la moda en este caso es 9, ya que es la puntuación que más se repite en la serie.
b. Cuando todas las puntuaciones de un grupo tienen la misma fre cuencia, (es decir, se repiten igual número de veces), se acostumbra decir que el grupo de puntuaciones no tiene moda; por ejemplo, en el grupo 0.5, 0.5, 1.6, 1.6, 3.9, 3.9, no hay moda.
c. Cuando dos puntuaciones consecutivas tienen la misma frecuencia y esta frecuencia común es mayor que cualquier otra puntuación, la moda puede considerarse como el promedio de las dos puntuacio nes, por ejemplo:

   La moda del siguiente grupo de puntuaciones: 0, 1,1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, es 2+3 = 5, entonces 5/2 = 2.5
d. Si en un grupo de puntuaciones hay dos que no son consecutivas y tienen la misma frecuencia, y esta frecuencia común es mayor que la de cualquier otra puntuación, se dice que existen dos modas, por ejemplo:

   En el siguiente grupo de puntuaciones: 10, 11, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 14, 17, tanto 11 como 14 se pueden considerar como modas y en estos casos el grupo se llama *bimodal.*

Una distinción conveniente puede hacerse entre la moda mayor y la menor. En un grupo de puntuaciones la moda mayores únicamente aquella que satisface la definición de moda. Sin embargo, varias modas menores podrían existir en puntos a lo largo de un grupo de puntuaciones.

Este tipo de eventos le interesarían, por ejemplo, a un productor de camisas, ya que sabría cuál es el modelo que más se prefiere, pero tambien sabría cuál es el otro modelo que también se prefiere, así podría prever cómo distribuye la producción de los distintos modelos de camisas que produce.

2.3.8 La moda para una serie de clases y frecuencias

En este tipo de series se aplica el mismo criterio que en las anteriores, es decir, se busca el valor que se repita el mayor número de veces, sólo que, como en estos casos los valores se encuentran agrupados en clases, para expresar la clase que contiene la moda es suficiente con utilizar el promedio de la clase que contiene la moda, por ejemplo:

Si en una distribución de clases y frecuencias vemos que la mayor frecuencia se encuentra en un intervalo de clase de 60-69, en algunos casos es suficiente decir que la moda está comprendida entre los valores 60-69. Pero en otras ocasiones hay que fijar un valor, así que basta con tomar el punto medio de la clase, es decir, en este caso la moda sería 64.5.

Ejercicios (2.3.3):

1. Hallar la media, mediana y la moda de los siguientes valores: 1.2, 1.5, 1.6, 2.1, 2.4, 2.4, 2.7, 2.8, 3.0, 3.0, 3.0, 3.1, 3.1, 3.1, 3.4.

   Solución: en este caso, como son dos los valores que más se repiten en la serie, y además son consecutivos, la moda es (3.0+3.1)/2 = 3.05; la media y la mediana se pueden calcular fácilmente.

2. Hallar la media, mediana y la moda de los siguientes datos:

   a. 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6
   b. 51.6,48.7, 50.3, 49.5, 48.9

Solución:

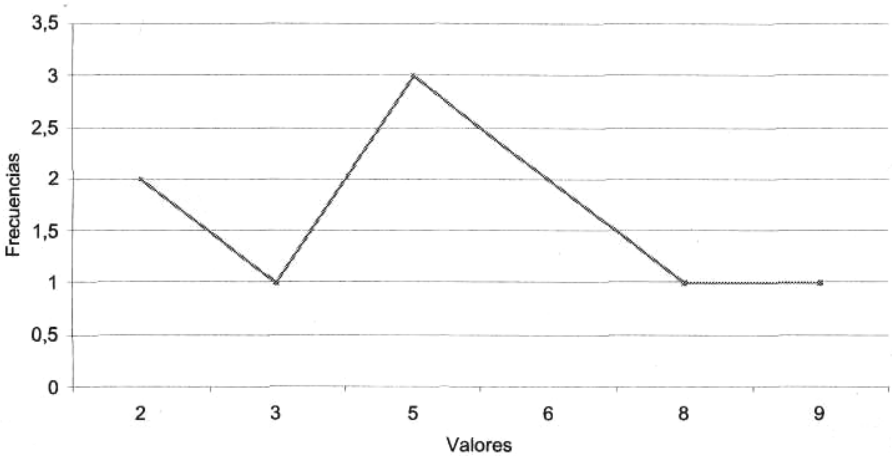
a. Puestos en orden de magnitud, los números son:
2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 9, entonces:

$$\overline{x} = \left(\frac{2+2+3+5+5+5+6+6+8+9}{10}\right) = \frac{51}{10} = 5.1$$

Md = (n+1)/2 = (10+1)/2 = 5.5, la mediana se encuentra entre el lugar 5 y 6 de la serie, es decir, (5+5)/2 = 5.

Mo - Número que se presenta con mayor frecuencia: 5

Gráfica de frecuencias



b. Puestos en orden de magnitud, los valores son: 48.7, 48.9, 49.5, 50.3, 51.6

$$\overline{x} = \left(\frac{48.7+48.9+49.5+50.3+51.6}{5}\right) = 49.8$$

$Md = (n+1)/2 = (5+1)/2 = 3$, la mediana se encuentra entre el lugar 3 de la serie, es decir, 49.5

$Mo =$ En este caso, no existe moda.

3. Encontrar la moda, la media y la mediana de las 100 puntuaciones que se presentan en la siguiente distribución de frecuencias agrupadas:

Intervalos	frecuencias
20-22	8
17-19	14
14-16	41
11-13	26
8-10	7
5-7	4
	100

4. Calcular de los siguientes cuadros: la moda, mediana y media, para cada caso:

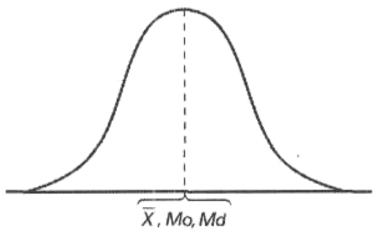
Caso a		Caso b	
Clases	frecuencias	Intervalos	frecuencias
30-39	4	30-39	2
40-49	6	40-49	10
50-59	8	50-59	6
60-69	12	60-69	12
70-79	9	70-79	9
80-89	7	80-89	7
90-99	4	90-99	4

2.3.9 Consideraciones con respecto a la moda, media y mediana

El cálculo de la media, la mediana y la moda, una vez dominados, resultan un proceso mecánico; sin embargo, la elección entre estas tres medidas y su interpretación, algunas veces puede requerir detenidas reflexiones. A continuación enumero algunas consideraciones que deben tomarse en cuenta cuando se esté haciendo frente a la elección:

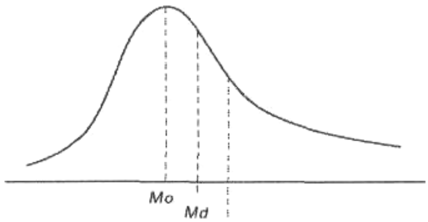
1. En grupos pequeños, la moda puede ser completamente ines table, por ejemplo: la moda del grupo (1, 1, 1, 3, 5, 7, 7, 8), es 1, pero si uno de los unos se cambia por 0 y el otro por 2, la moda se convierte en 7.
2. La mediana no se afecta por el mayor o menor tamaño de las puntuaciones situadas por encima o por debajo de ella. Por ejemplo, en un grupo de cincuenta puntuaciones la mediana no cambiará si la puntuación mayor se triplica.
3. La media sí se ve influenciada por el tamaño de cada puntuación en el grupo. Por ejemplo, si 100 se suma a la tercera puntua ción mayor en un grupo de 10, la media del grupo aumentara en 10 unidades.
4. La tendencia central de grupos de puntuaciones con valores extremos se mide probablemente mejor por la mediana. Cabe recordar que cada puntuación en un grupo influye sobre la media. Así, un valor extremo puede alejar la media de un grupo de su valor inicial, que generalmente se consideraría como región central. Por ejemplo, si nueve personas tienen ingresos que fluc túan de $4 500.00 a $5 200.00, con un promedio de $4 400.00 y el ingreso de la décima persona es de $20 000.00, el promedio de ingresos del grupo de diez personas es de $6 410.00, este número no representa adecuadamente a ninguno de los grupos. La mediana sería preferible como medida de tendencia central en este caso.
5. Si la distribución es simétrica la media, la mediana y la moda coinciden:

Cuando la distribución es asimétrica pueden darse dos casos:



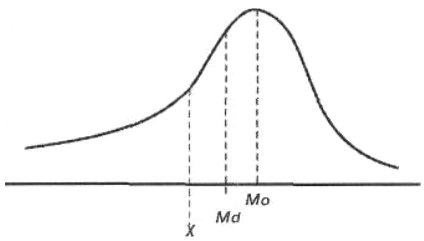
Asimétrica a la derecha:

En este caso la mediana está a la derecha de la moda y la media está a la derecha de la mediana.



Asimétrica a la izquierda:

En este caso la mediana está a la izquierda de la moda y la media está a la izquierda de la mediana.



Obsérvese que la mediana está siempre en medio de las tres medidas. Una regla para recordar estas relaciones es que la media, la mediana y la moda están en el orden alfabético en que aparecen en el diccionario cuando la distribución es asimétrica en la izquierda y en el orden contrario cuando la asimetría es hacia la derecha.

6. Algunos grupos de puntuaciones simplemente no manifiestan ninguna tendencia central en forma significativa, siendo a menudo engañoso calcular alguna medida de tendencia central (véase siguiente ejemplo).
7. La siguiente anécdota resume muchos de los problemas que se presentan en el uso de las medidas de tendencia central.

   Una anécdota improbable aclararía este problema de heterogeneidad, es decir, que la medida de tendencia central no es una descripción adecuada de todas las puntuaciones de un grupo. Una vez cinco hombres se sentaron en una banca del parque. Dos eran vagabundos, cada uno con un capital total de 25 centavos. El tercero era un obrero cuya cuenta bancaria y otros bienes totalizaban $2 000.00. El cuarto tenía $15 000.00 invertidos de diversas maneras. El quinto era un millonario con capital neto de $5 000 000.00. Por tanto, el activo modal del grupo era de 25 centavos. Esta cifra describe perfectamente el capital monetario de dos de las personas, pero es completamente errónea para las otras tres. La cifra mediana de $2 000.00, hace poca justicia a todos excepto al obrero. La media de $1 003 400.10, tampoco es satisfactoria para el millonario. Si tuviéramos que escoger una medida de tendencia central, tal vez la más indicada sería la moda que describe correctamente 40% de este grupo. Pero si se nos dice que "el capital modal de cinco personas sentadas en una banca del parque es de 25 centavos" lo más probable sería concluir que el capital total del grupo es aproximadamente de $1.25, que es un dato erróneo en más de cinco millones de pesos. Obviamente, sea lo que sea, es claro que no hay medida de tendencia central adecuada para esta "extraña compañía en una banca" que simplemente no tiene "tendencia central".[25]

---

[25] Ejemplo tomado de Gene, V. Glass y Julián C. Stanley, *Métodos estadísticos aplicados a las ciencias sociales,* Prentice Hall, México, 1970, p. 71.

8. Finalmente presentaremos una tabla donde se hace una comparación entre la media, mediana y moda.

Concepto	Definición	Ventajas	Limitaciones
Media	Es un dato que define el valor promedio de todas las puntuaciones.	1. Refleja cada valor. 2. Propiedades matemáticas atractivas.	1. Puede ser excesivamente influida por los extremos.
Mediana	El valor que divide a la serie en dos partes iguales. La mitad de los valores son mayores y la otra mitad son menores.	1. Menos sensible a los extremos que la media.	1. Difícil de determinar si hay gran cantidad de datos.
Moda	Valor con la frecuencia más alta.	Valor típico: más valores reunidos en este punto que en cualquier otro.	No se presta para el análisis matemático. Puede no ser un valor modal para algunos conjuntos de datos.

2.3.10 Otras medidas de tendencia central

Media geométrica: La media geométrica (Mg), de una serie de *n* números *X*\, x_2, x_3,..., x_n, se define como la raíz n-ésima del producto de los números que comprenden la serie.

$$Mg = \sqrt[n]{(x_1)(x_2)(x_3),\ldots,(x_n)}$$

Ejemplo: sean los números 1, 3 y 9, la media geométrica se define por:

$$Mg = \sqrt[3]{(1)(3)(9)} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

Otro ejemplo: calcular la media geométrica de 2, 4, 8.

$$Mg = \sqrt[3]{(2)(4)(8)} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

Finalmente, diremos que la media geométrica se utiliza en el cálculo de los promedios de tasas de variación y en la elaboración de los números índices.

Media armónica: La media armónica (/Via), de una serie de *n* números *i, x_2, x_3,..., x_n , se define como el valor recíproco de la media aritmética de los números:

$$Ma = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Ejemplo: calcular la media armónica de los números 2, 4, 8:

$$Ma = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{3}{\frac{7}{8}} = \frac{24}{7} = 3.43$$

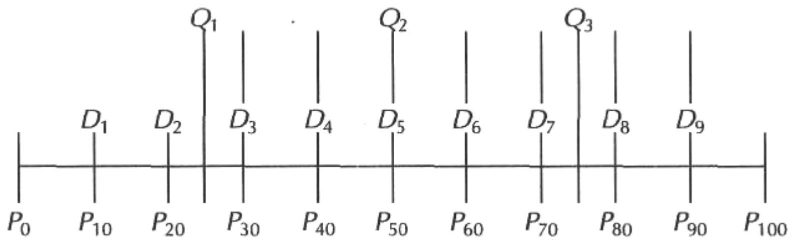
2.3.11 *Otras medidas: Deciies, cuartiles y percentiles*[26]

Cuantiles: Un cuantil es un punto en una escala numérica que se supone abarca una serie de observaciones dividiéndola en dos grupos, cuyas

[26] Véase nota al pie núm. 20.

respectivas proporciones se conocen. A medida que se divide la serie en más partes aparecen los cuartiles, quintiles, deciles y percentiles. Una serie donde sus valores se encuentren ordenados de forma creciente o decreciente, aquellos tres términos que dividen a la serie en cuatro partes o grupos de números iguales. El primero de éstos recibe el nombre del primer cuartil, el siguiente segundo cuartil y el último tercer cuartil. Análogamente, los términos que dividen a la serie en 10 partes iguales, se llaman "deciles" y se representan por D_{1r} D_2, ..., D_{10}, y los términos que dividen a ¡a serie ordenada en 100 partes iguales, se llaman "percentiles" o "porcentiles" y se representan por los símbolos P,, P2,..., *Pioo-*

Esto lo podemos ver en forma gráfica de la siguiente manera:



Bajo esta lógica resulta claro que si se comprende cómo calcular los percentiles se pueden calcular los deciles y los cuartiles al mismo tiempo, por ejemplo: el primer cuartil de una serie se refiere al percentil número 25 de una muestra. Esto lo podemos comparar con los quebrados, por ejemplo donde 1/2 = 2/4 = 8/16, etc. y así tratar de comprender mejor esto.

Pasemos ahora a los ejemplos de cómo se calculan los cuartiles, deciles y percentiles en los diversos tipos de series que hemos estudiado.

2.3.12 Cuantiles, deciles y percentiles para series simples

En este tipo de series se puede aplicar una sola fórmula para calcular los cuartiles, deciles y percentiles:

$$Q_i = \frac{\alpha\ (n+1)}{4} \quad ; \quad D_i = \frac{\alpha\ (n+1)}{10} \quad ; \quad P_i = \frac{\alpha\ (n+1)}{100}$$

Donde: Q_i = cuartil, D_i = decil y P_i = percentil.
α = El Q, D, o P que se quiera calcular.
n = Número total de datos.

Ejemplo: calcular los cuartiles de la siguiente serie: 1, 4, 5, 7, 10, 13, 14, 16, 20, 23, 25.

$$Q_1 = \frac{1\ (11+1)}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$Q_2 = \frac{2\ (11+1)}{4} = \frac{12}{2} = 6$$

$$Q_3 = \frac{3\ (11+1)}{4} = \frac{3\ (12)}{4} = \frac{(3)(3)(4)}{4} = 9$$

Conclusión:

i. El primer cuartil se encuentra en el tercer valor de la serie, es decir, *Q^* = 5.
i i. El segundo cuartil se encuentra en el sexto valor de la serie, es decir, en Q_2 = 13.
iii. El tercer cuartil se encuentra en el noveno valor de la serie, es decir, en Q_3 = 20.
iv. Finalmente, bastaría con calcular el primer cuartil y, una vez teniendo ese valor para calcular el segundo y el tercero, habría que multiplicar por dos y tres respectivamente el resultado del primer cuartil (Q, - 3 ; Q_2 = (2)(3) - 6 y Q_3 - (3)(3) - 9.

Observación: El valor del cuartil, del decil o del percentil, lo que nos indica es el lugar dentro de la serie donde se encuentra el cuartil, decil o percentil, y es muy importante que se ordenen los datos de forma ascendente o descendente.

Ejercicio (2.3.4): Calcular los cuartiles de los ejercicios de 80 y 40 datos, vistos con anterioridad.

2.3.13 Cuantiles, deciles y percentiles para series de frecuencias[27]

Centil o percentil: el percentil Pes el punto bajo el cual se halla el Ppor ciento de las puntuaciones. Rara calcular determinado percentil, primero deben ordenarse las puntuaciones en orden de magnitud (de mayor a menor), lo cual puede resultar laborioso si se trata de un grupo muy grande. Por lo tanto será más conveniente tabularlos en una distribución de frecuencias agrupadas, adjuntando una columna de frecuencias acumuladas.[28]

Una vez que tenemos ordenada la serie en términos de sus frecuencias, aplicaremos la siguiente fórmula que nos permite calcular cualquier percentil:

$$P_p = L_i + \frac{pn - (fa)}{f}$$

Donde:

$P_p =$ El percentil que se desea calcular.

$pn =$ El número de frecuencias con respecto al total que se requiere para el cálculo p se refiere a una expresión de tanto por cien-

[27] fera este tipo de series, basta con explicar la forma en que se pueden calcular los per centiles y una vez comprendido el procedimiento, puede calcular los deciles y cuartiles de cualquier muestra ordenada en frecuencias, por ejemplo: el segundo cuartil es igual al quinto decil y éstos a su vez son iguales al percentil 50 (es decir, bastaría con calcular el valor del percentil 50, y con esto ya sabría que ese valor es el mismo para el segundo cuarto y quinto decil).

[28] La construcción de una distribución de frecuencias acumuladas facilita enormemente el cálculo de cualquier percentil. La frecuencia acumulada, hasta determinada puntuación, es el número total de frecuencias observadas en dicha puntuación y por debajo de ella.

to, así que se puede expresar en decimales y multiplicado por el total de frecuencias y así saber cuántas de ellas se requieren.

L_i = Límite inferior real de la puntuación del intervalo que contiene la frecuencia *pn.*

fa = Frecuencia acumulada hasta el límite inferior.

f = La frecuencia del intervalo que contiene la frecuencia *pn.*

Ejemplo: un profesor aplicó una prueba de rendimiento de 40 preguntas a 125 estudiantes, siendo la puntuación el número de respuestas correctas. En la siguiente tabla se concentran los resultados:

Tabla 1

Puntuación de la prueba	Frecuencia	Frecuencia acumulada
38	1	125
37	1	124
36	3	123
35	5	120
34	9	115
33	8	106
32	17	98
31	23	81
30	24	58
29	18	34
28	10	16
27	3	6
26	1	3
25	0	2
24	2	2
	125	

a. Calcular el percentíl 25 de las 125 puntuaciones, o sea, el punto P_2s, bajo el cual se sitúa 25% del total de puntuaciones, también se puede decir que es equivalente al primer cuartil.

Respuesta:

Haremos el cálculo siguiendo cinco pasos básicos, pero antes recordemos que nuestra fórmula para el cálculo de percentiles para una serie de frecuencias es:

$$P_p = L_i + \frac{pn - (fa)}{f}$$

Paso 1. Hallar *pn,* donde *P*- percentil 25 = 0.25 y *n* = al número total de frecuencias, entonces:

$$(0.25)\ n = (0.25)\ (125) = 125 / 4 = 31.25$$

$$\boxed{pn = 31.25}$$

Paso 2. Determinar el límite inferior real L_i de la clase de puntuaciones que incluya la frecuencia acumulada de 31.25. Encontramos que la frecuencia de 31.25, se encuentra en la puntuación de 29 aciertos, por tal razón el límite inferior real es: 28.5.

Paso 3. Restar el valor de *pn* (31.25), de la frecuencia acumulada (/a), hasta el límite inferior que es igual a 28.5, punto en el cual se aprecia que se han acumulado 16 frecuencias.

Paso 4. Dividir el resultado del paso 3, por la frecuencia *f de* intervalo que contiene la cuarta parte de las frecuencias: 15.25 / 18 = 0.85. El paso 4 consiste en determinar qué fracción del intervalo de clase se halla por debajo de la frecuencia 31.25. En el intervalo 28.5-29.5, hay 18 frecuencias y como 15.25/18 = 0.85, vemos que las primeras 15.25, frecuencias ocupan dicho intervalo.

Paso 5. Sumar el resultado del paso 4, al valor de *L,* con lo cual obtenemos:

$$P_{25} = 28.5 + 0.85 = 29.35$$

Interpretación: Se puede concluir que 25% de las puntuaciones o calificaciones que obtuvieron los alumnos se hallan por debajo de 29.35 y de modo análogo, 75% se halla por encima de 29.35 puntos.

Si el estudiante considera que ya no es necesaria la aplicación de los pasos, puede aplicar la fórmula directamente para el cálculo:

$$P_{25} = L_i + \frac{pn-(fa)}{f} = 28.5 + \frac{31.25-16}{18} = 28.5 + 0.85 = 29.35$$

Finalmente, podemos presentar de una forma resumida los pasos a seguir:

Resumen de los cálculos

Paso 1	$(pn) = 0.25\ (n) = n / 4 = 125 / 4 = 31.25$
Paso 2	Hallar el límite inferior real de la clase que contiene la frecuencia 31.25 $L = 28.5$
Paso 3	Restar la frecuencia acumulada del L de 31.25: $31.25 - 16 = 15.25$
Paso 4	Dividir el resultado del paso 3, entre la frecuencia f del intervalo que contiene la frecuencia 31.25: $15.25 / 18 = 0.85$
Paso 5	Sumar el resultado del paso 4 al valor de L: P25 = 28.5 + 0.85 = 29.35

Ejercicio (2.3.5): calcular los siguientes percentiles: P_2*5, P40, P50,* P75, P_{90}, P_{10}, de la serie de 40 valores, una vez transformada en una serie de clases y frecuencias.

2.3.14 Cuantiles, deciles y percentiles para series de clases y frecuencias

El cálculo de percentiles para una serie agrupada en clases y frecuencias casi es idéntico al que se hace para series de frecuencias.

La ecuación para el cálculo de percentiles en series de clases y frecuencias es la siguiente:

$$P_p = L_i + \left(\frac{pn - (fa)}{f} \right)(c)$$

$P_p =$ El percentil que se desea calcular.
$l_i =$ Límite inferior real de la puntuación del intervalo que contiene la frecuencia *pn.*
$pn =$ El número de frecuencias con respecto al total que se requiere para el cálculo (p, se refiere a una expresión de tanto por ciento, así que se puede expresar en decimales y multiplicado por el total de frecuencias y así saber cuántas de ellas se requieren).
$fa =$ Frecuencia acumulada hasta el límite inferior. La frecuencia
$f =$ del intervalo que contiene la frecuencia *pn.* La amplitud del
$c =$ intervalo de puntuaciones (es decir, la amplitud de clase).

Ejemplo: El gobierno decidió preguntar la edad a las personas que realizaban alguna actividad remunerada de una población del estado de Morelos para saber entre qué valores se encontraba la población productiva. Los valores en los cuales se agruparon las diversas edades se proporcionan en la siguiente tabla:

Tabla 2

Intervalo de edad	Frecuencia	Frecuencia acumulada
64-67	4	1982
60-63	38	1978
56-59	82	1940
52-55	120	1858
48-51	125	1738
44-47	160	1613
40-43	221	1453
36-39	204	1232
32-35	307	1028
28-31	291	721
24-27	295	430
20-23	135	135
	1 982	

a. Calcular el percentil 50 de las 1 982 puntuaciones, o sea, el punto P_{50}, bajo el cual se sitúa 50% del total de puntuaciones también podemos decir que es equivalente al segundo cuartil.

Respuesta:

Haremos el cálculo siguiendo cinco pasos básicos en su forma resumida, pero antes recordemos que nuestra fórmula para el cálculo de percentiles para una serie de frecuencias es:

$$P_p = L_i + \left(\frac{pn - (fa)}{f}\right)(c)$$

Los pasos de forma resumida son los siguientes:

Paso 1	0.50 (n) = 0.50 (1982) = 991
Paso 2	Hallar el límite inferior real de la clase que contiene la puntuación 991 $L_i = (32+31) / 2 = 31.50$
Paso 3	Restar de 991 la frecuencia acumulada Hasta L_i: 991 – 721 = 270
Paso 4	Dividir el resultado del paso 3 entre la frecuencia f del intervalo que contiene la puntuación 991 270 / 307 = 0.88
Paso 5	Multiplicar el resultado del paso 4 por la amplitud de la clase: (0.88)(4) = 3.52
Paso 6	Sumar el resultado del paso 5 al valor de L: P50 = 31.50 + 3.52 = 35.02

Interpretación: El resultado de P_{50} = 35.02, quiere decir que 50% de las personas que se encuentran desarrollando alguna actividad productiva remunerada es menor de 35 años de edad.

Otro ejemplo: Determinar el percentil 20, también sería el primer quintil, el segundo decil, etcétera.

Solución: La puntuación de *pn,* o sea (0.20)(1982) = 396.4, se halla en el intervalo 24-27, cuyo límite inferior real es de (24+23) / 2 = 23.5. La diferencia entre *pn* y la frecuencia acumulada hasta 23.5 es: 396.4 - 135 - 261.4. Teniendo en cuenta que la frecuencia del intervalo que comprende la puntuación 396.4 es 295 y que el tamaño del intervalo es de 4 unidades, resulta:

$$P_{20} = 23.5 + \left(\frac{396.4 - 135}{295}\right)(4) = 23.5 + 3.54 = 27.04 \qquad P_{20} = 27.04$$

Esto quiere decir que 20% de las personas es menor de 27 años de edad.

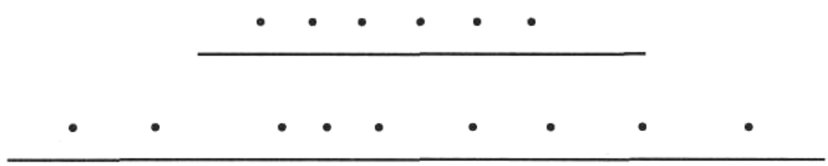
Ejercicio (2.3.6): calcular los percentiles: P_{25}, P_{40}, P_{90}, P_{60}, P_{10} y P_{75}, de la serie de 80 valores ordenada en clases y frecuencias.

2.4 Medidas de dispersión o variabilidad: rango, desviación media, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación

Las medidas de tendencia central se refieren a la concentración de puntuaciones de una determinada escala numérica en un grupo. Una medida particular de tendencia central da lugar a una puntuación o valor que en cierto sentido "representa" a todas las puntuaciones del grupo. Este proceso pasa por alto las diferencias entre las puntuaciones en sí. Asimismo, para evaluar la variación de las puntuaciones se necesitan estadígrafos descriptivos que miden la heterogeneidad, dispersión o esparcimiento de puntuaciones.

Para describir en forma adecuada un conjunto de datos, son necesarios dos tipos de medidas de resumen: las de tendencia central y las de dispersión. Además, para obtener información respecto a la parte media de un conjunto de números, también es conveniente tener un método para expresar la cantidad de dispersión o difusión que hay entre los datos. Por ejemplo, las medidas de dispersión indican si los valores están relativamente cercanos uno de otro o si se encuentran dispersos.

En forma esquemática se ilustra de la siguiente manera:



En el primer caso podemos ver que existe un dispersión baja en los datos, es decir, se encuentran a muy poca distancia uno de otro. Mientras que en el segundo caso la dispersión es alta.

Existen diversas medidas que nos permiten calcular la dispersión de un conjunto de datos, a continuación estudiaremos cada una de ellas.

2.4.1 Rango

La amplitud o rango de un grupo de números es generalmente la medida más sencilla de calcular y comprender. Se concentra en el número mayor y el menor del grupo, es decir, los puntos extremos. Dicha medida se puede expresar en dos formas:

a. Como la diferencia entre los valores mayor y menor de la muestra.
b. Como los valores mayor y menor del grupo.

Por ejemplo: Considérense estos tres valores: 1, 10 y 25. La diferencia entre el número mayor y el menor es 25 - 1 = 24. De igual manera se puede decir que la amplitud de los valores es del 1 al 25. Este último método tiende a ser más informativo. Por ejemplo, saber solamente que la amplitud de un conjunto de números es de 44 no nos dice nada respecto a los números; sin embargo, si se establece que el rango de variación es de 300 a 344, se proporciona más información acerca de la magnitud de los datos.

En general: El rango se expresa estableciendo la diferencia entre los números mayor y menor de un grupo de puntuaciones, o bien, identificando ambos números.

Ejemplos:

Formas de expresar la amplitud de variación o rango

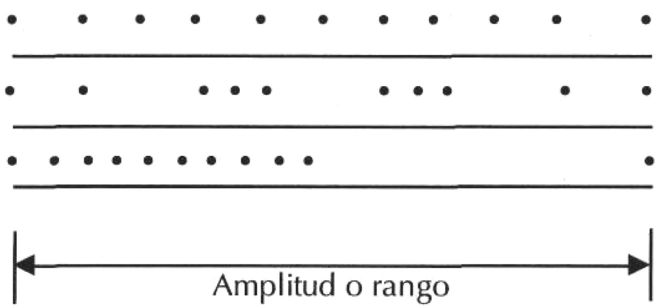
Datos	Diferencia	Del menor al mayor
1, 5, 7, 13	13–1 = 12	1 a 13

3, 4, 8, 14, 17, 36, 48, 73	73−3 = 70	3 a 73
1.9, 2.1, 3.2, 4.7, 5.6,10.3	10.3 − 1.9 = 8.4	1.9 a 10.3

La ventaja de utilizar la amplitud o rango como medida de dispersión se basa en el hecho de que su obtención es relativamente sencilla, aun cuando se trate de un conjunto bastante grande de números.

La principal limitación del rango es que considera solamente los valores extremos de un conjunto y no proporciona mayor información respecto de los demás, a veces existen dos valores extremos que jamás se repiten en la muestra y si los consideramos podemos dar una falsa imagen del conjunto, por ejemplo el caso de las alturas.

En algunos grupos de puntuaciones se pueden presentar diversos tipos de dispersión, por ejemplo:



En este caso se presentan tres conjuntos de puntuaciones bastante diferentes que poseen la misma amplitud. En el primer caso los valores se distribuyen de una manera uniforme y esta medida cumple con su objetivo.

En el segundo conjunto los puntos se encuentran más agrupados aunque la amplitud o rango proporciona una "cruda" medida de dispersión. No obstante, el tercer conjunto demuestra cómo se puede influir fácilmente en la amplitud mediante unos cuantos valores externos y presentar información bastante engañosa respecto a la dispersión.

Se ha intentado corregir este tipo de problemas, algunas veces se elimina la puntuación más baja y la más alta de la muestra, ya que en la mayoría de los casos no son las más representativas de la generalidad del grupo y a veces sólo afectan en los resultados.

Otros procedimientos más refinados son: el cálculo del rango o amplitud entre el percentil 10 y el percentil 90 o el rango intercuartil, que no son otra cosa más que la eliminación de los extremos de la muestra para tomar como base al conjunto de datos más representativos.

2.4.2 Amplitud o rango entre el percentil 10 y 90 (RP)

En razón de que son más numerosas las puntuaciones que influyen directamente sobre la amplitud entre el percentil 10 y 90, es decir, se dejan fuera los extremos, este valor es un poco más estable que el rango y es fácil de calcular. Sin embargo, ninguna de estas ventajas ha sido lo suficientemente convincente como para hacer del *RP* una medida de variabilidad popular y, de hecho, rara vez se emplea.

$$RP = P_{90} - P_{10}$$

Ejercicio (2.4.1): Calcular la amplitud o rango entre el percentil 90 y 10 de las series de 40 y 80 valores.

2.4.3 El rango intercuantil (RQ)

El rango intercuartil *(RQ)* es la diferencia entre el primer y tercer cuartil o sea:

$$RQ = Q_3 - Q_1$$

Esta medida, para propósitos descriptivos, es definitivamente superior al rango, se dice que es superior porque se calcula entre el primer y tercer cuartil, eliminando dos extremos de un cuarto de la muestra, considerando que la mayoría de las puntuaciones se agruparán en la proporción restante, excepto en cuanto a simplicidad de cálculos.

Ejercicio (2.4.2): Calcular el rango intercuartil de las series de 40 y 80 valores.

2.4.4 Desviación media (DM)

Otra medida de dispersión que incluye a todos los datos es la desviación media. Es la media de las desviaciones a partir de un valor central.

La distancia entre la puntuación x_i y la media se da por |x, - x| y el promedio de las *n* distancias de las puntuaciones respecto de su media se denomina desviación media *(DM).*

La fórmula que nos permite el cálculo para cada tipo de serie es:

Series simples	Series de frecuencia	Series de clases y frecuencias
$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n}$	$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n}$	$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \lvert \gamma_i - \overline{x} \rvert}{n}$
Donde: x_i = Valores de x $\overline{X}$ = Valor de la media n = Número de elementos	Donde: f_i = Frecuencias	Donde: γi = Valor de la marca de clase o punto medio de la clase

$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$, índica la desviación de cada puntuación respecto de la media del grupo. Estas n desviaciones describen hasta qué punto varían las puntuaciones originales.

La suma de dichas desviaciones positivas y negativas siempre será cero. Si consideramos las desviaciones como distancias de las puntuaciones respecto de la media, sin tener en cuenta el signo, la suma de estas distancias indica la variabilidad de las puntuaciones, es decir, cuánto varía en promedio cada puntuación con respecto a la media.

La distancia de cada valor de x_i, respecto de la media se halla mediante el valor absoluto del número; el valor absoluto de - 4.65, se denota por $|-4.65|$ y es igual a 4.65, y asimismo cualquier valor absoluto de un número positivo es ese mismo número, y el de cualquier número negativo se halla cambiando el signo de menos por el más.

Ahora veamos algunos ejemplos de la forma de calcular la desviación media para series simples, de frecuencias y de clases y frecuencias:

2.4.5 Para series simples

Partiendo de los siguientes datos: \$10, \$12, \$13, \$10, \$15, referentes a los salarios por hora (en pesos), que perciben los trabajadores de cinco empresas de limpieza que ofrecen este servicio, calcule su desviación media *(DM).*

Recordemos que necesitamos, antes que nada, saber el valor de la media, que es: 60/5 = 12

Debemos construir una tabla que nos permita realizar los cálculos con facilidad:

Datos (x_i)	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
10	10 − 12 = −2	2
12	12 − 12 = 0	0
13	13 − 12 = 1	1
10	10 − 12 = −2	2
15	15 − 12 = 3	3
$\sum x_i = 60$		$\Sigma = 8$

Finalmente realizamos el cálculo:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n} = \frac{8}{5} = 1.60$$

$$DM = 1.60$$

Interpretación: podemos decir que la desviación o desviación promedio de los salarios que se pagan en las empresas que prestan el servicio de limpieza es de un peso con sesenta centavos ($1.60).

También podemos decir que los salarios de las distintas empresas son diferentes en promedio $1.60 pesos con respecto a la media general, que es de 12.00 pesos.

2.4.6 Para una serie de frecuencias

Considerando la siguiente información que se refiere a ciertos trabajadores de una empresa y la frecuencia de faltas que tuvieron en un mes, de acuerdo con los siguientes datos: 2, 5, 6, 8, y sus respectivas frecuencias: 4, 1,3, 4, calcule la desviación media, recordando que la fórmula para calcular la desviación media para una serie de frecuencias es:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \overline{x}|}{n}$$ entonces hay que generar la información que nos permita aplicarla:

Trabajadores (xi)	Faltas (fi)	$xi - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$(fi)\lvert x_i - \overline{x}\rvert$
2	4	-3.25	3.25	13
5	1	-0.25	0.25	0.25

6	3	0.75	0.75	2.25
8	4	2.75	2.75	11
	$\Sigma = 12$	0		26.5

Necesitamos antes que nada, saber el valor de la media, el promedio de trabajadores que faltan en un mes: 63/12 = 5.25.

Finalmente calculamos la *DM:*

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left| x_i - \overline{x} \right|}{n} = \frac{26.5}{12} = 2.2$$

$$DM = 2.2$$

Interpretación: podemos decir que el promedio de trabajadores que faltan en un mes es de 5.25 ~ 5, pero existe una desviación promedio o grado de error de 2.2 días con respecto a la media, así que el número de trabajadores que faltan puede variar por ejemplo: de 3 a 7 por mes, redondeando y considerando sólo una vez la *DM* con respecto a la media, así que con esta información el dueño de la empresa puede tomar medidas más enérgicas con sus empleados o motivarlos con incentivos para que no falten.

2.4.7 Para una serie de clases y frecuencias

Considerando la siguiente información de las estaturas en cm de las mujeres del estado de Sonora, calcule la desviación media de las estaturas, recordemos que la fórmula para calcular la desviación media para una serie de clases y frecuencias es:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left| \gamma_i - \overline{x} \right|}{n}$$

Entonces hay que realizar las operaciones que nos permita aplicarla. Ya sabemos que es conveniente manejar la información en una tabla como la siguiente:

Datos (x_i)	Marca de clase (γ_i)	Frec. (fi)	(fi)(γ_i)	$\gamma_i - \overline{x}$	$\left\| \gamma_i - \overline{x} \right\|$	(fi)$\left\| \gamma_i - \overline{x} \right\|$
118 - 126	122	3	366	-27	27	81
127 - 135	131	5	655	-18	18	90
136 - 144	140	4	560	-9	9	36
145 - 153	149	8	1192	0	0	0
154 - 162	158	9	1422	9	9	81
163 - 171	167	4	668	18	18	72
172 - 180	176	2	352	27	27	54
		$\Sigma = 35$	$\Sigma = 5215$	$\Sigma = 0$		$\Sigma = 414$

Recordemos que necesitamos, antes que nada, saber el valor de la media, que es: 5215/35 = 149 cm en promedio.

Ahora sí podemos aplicar la fórmula:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left| \gamma_i - \overline{x} \right|}{n} = \frac{414}{35} = 11.83$$

$$DM = 11.83$$

Interpretación: la desviación media o promedio, con respecto a la media, es de 11.83 centímetros.

Ejercicio (2.4.3): Calcular la desviación media de las series de clases y frecuencias de 40 y 80 valores.

2.4.8 Varíanza (variancia) y desviación estándar (s^2 y s)

La varianza de una muestra se calcula casi en la misma forma que la desviación media, con dos pequeñas diferencias: 1) las desviaciones se elevan al cuadrado antes de ser sumadas y 2) se obtiene el promedio, utilizando n-1 en lugar de n, ya que esto pretende proporcionar un mejor cálculo de la varianza.

Definición: La varianza de una muestra o conjunto de datos es la desviación promedio de valores obtenidos a partir de la media elevada al cuadrado y dividida entre n-1. Cuando hablamos de datos que reflejan únicamente una parte de la población, es decir, una muestra, utilizamos n; cuando nos referimos a toda una población, es decir, los datos de la muestra son ¡guales al total de la población estudiada, pero como eso sucede en pocos casos casi siempre se utiliza n-1.

La variancia o varianza se representa como s^2 cuando se refiere a la varianza muestral y como o^2 (letra griega sigma minúscula al cuadrado), cuando se trata de la varianza de una población.

La fórmula para calcular la varianza de una muestra[29] tiene pequeñas modificaciones, las cuales dependen del tipo de serie al que se quiera aplicar, como a continuación se presenta:

---

[29] Para una población sería: $\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{N}$

Series simples	Series de frecuencia	Series de clases y frecuencias
$s_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	$s_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	$s_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i (\gamma_i - \bar{x})^2}{n-1}$
Donde: x_i = Valores de x $\bar{X}$ = Valor de la media n = Número de elementos	Donde: f_i = Frecuencias	Donde: γi = Valor de la marca de clase o punto medio de la clase

Veamos algunos ejemplos: para facilitar la aplicación de la fórmula se recomiendan los siguientes pasos:

2.4.9 Para series simples

a. Calcular la media.
b. Restar la media a cada valor del conjunto, originando las des viaciones con respecto a la media.
c. Elevar al cuadrado cada una de estas desviaciones y realizar la sumatoria.
d. Dividir el resultado de la sumatoria entre n-1 en el caso de datos muéstrales o dividir entre *n,* si los datos equivalen a todos los valores de una población.

Ejemplo: partiendo de los siguientes valores calcule la varianza para la muestra:

Datos (x_i)	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$
10	10 − 12 = −2	4
12	12 − 12 = 0	0
13	13 − 12 = 1	1
10	10 − 12 = −2	4
15	15 − 12 = 3	9
$\sum x_i = 60$		$\Sigma = 18$

Aplicando la fórmula:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{60}{5} = 12 \quad ; \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = \frac{18}{4} = 4.5 \quad ; \qquad \therefore \quad s^2 = 4.5$$

2.4.10 Para series de frecuencias

a. Calcular la media.
b. Agregar una columna donde se coloquen las frecuencias de la serie.
c. Restar la media a cada valor del conjunto y con ello originar las desviaciones con respecto a la media.
d. Elevar al cuadrado cada una de estas desviaciones.
e. Multiplicar la frecuencia correspondiente a cada una de las desviaciones al cuadrado y realizar la sumatoria.
f. Dividir el resultado de la sumatoria entre n-1 en el caso de datos muéstrales o dividir entre *n* si los datos equivalen a todos los valores de una población.

Ejemplo: considerando los siguientes valores calcule la varianza:

Datos (x_i)	Frec. (f_i)	$(f_i)\ (x_i)$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - x)^2$	$f_i\,(x_i - x)^2$
2	4	8	-3.25	10.56	42.25
5	1	5	-0.25	0.06	0.06
6	3	18	0.75	0.56	1.69
8	4	32	2.75	7.56	30.25
	$\Sigma = 12$	$\Sigma = 63S$	$\Sigma = 0$		$\Sigma = 74.25$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n} = \frac{63}{12} = 5.3\,; s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = \frac{74.25}{11} = 6.75\,;$$

$$\therefore s^2 = 6.75$$

2.4.11 Para series de clases y frecuencias

a. Agregar una columna en donde se calculen las marcas de clase, es decir, los valores de y¡ que ocuparán el lugar de x, en la fórmula.
b. Agregar una columna donde se coloquen las frecuencias de la serie.
c. Calcular la media.
d. Restar la media a cada marca de clase del conjunto y con ello originar las desviaciones con respecto a la media.
e. Elevar al cuadrado cada una de estas desviaciones.
f. Multiplicar la frecuencia correspondiente a cada una de las desviaciones al cuadrado y realizar la sumatoria.
g. Dividir el resultado de la sumatoria entre n-1 en el caso de datos muéstrales o dividir entre *n,* si los datos equivalen a todos los valores de una población.

Ejemplo:
Considerando los siguientes datos calcule la varianza:

Altura pulgadas	Marca de clase (γ_i)	Frecuencias (f_i)	$(f_i)(\gamma_i)$	$\gamma_i - \overline{X}$	$(\gamma_i - \overline{X})^2$	$(fi)(\gamma_i - \overline{X})^2$
60-62	61	5	305	-6.45	41.60	208.0
63-65	64	18	1 152	-3.45	11.90	214.2
66-68	67	42	2 814	-0.45	0.20	8.4
69-71	70	27	1 890	2.55	6.50	175.5
72-74	73	8	584	5.55	30.80	246.4
		100	6 745			852.5

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \gamma_i}{n} = \frac{6745}{100} = 67.45\ ; \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left(\gamma_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = \frac{852.5}{99} = 8.6;$$

$$\therefore s^2 = 8.6$$

Una vez que hemos visto los ejemplos, mencionaremos algunas *propiedades de la varianza.*

¿Cómo se verá afectada la varianza si a un grupo de puntuaciones se le *suma un valor constante?* En general, la varianza permanece constante bajo la adición de una constante c a todas las puntuaciones de un grupo como se demuestra a continuación:

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} \text{, aplicando la constante}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(x_i + c\right) - \left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + c\right)/n\right]\right\}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{x_i + c - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i/n\right) - \left(nc/n\right)\right\}^2}{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + c - \bar{x} - c\right)^2}{n-1}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

Se puede comprobar fácilmente esta propiedad si le sumamos un valor constante a cada uno de los datos del ejemplo de la serie simple y calculamos la varianza, con esto podemos ver que el valor no cambia.

¿Qué sucede con la varianza si cada puntuación se multiplica por una constante?

En general, la varianza será igual a c^2s^2 siempre que las puntuaciones del grupo se multipliquen por una constante como a continuación se demuestra:

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} \text{, aplicando la multiplicación de una constante}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{c\,x_i - \left[\sum_{i=1}^{n} c\,x_i/n\right]\right\}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{c\,x_i - \left[c\sum_{i=1}^{n} x_i/n\right]\right\}^2}{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[c\left(x_i - \overline{x}\right)\right]^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c^2\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = \frac{c^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}$$

$$por\,lo\,tanto \quad \frac{c^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = c^2\,\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1},\ es\,decir,\ es\,igual\,a\,c^2 s^2$$

Ya que hemos visto la forma de calcular la varianza y algunas de sus propiedades en los diferentes tipos de series, es importante mencionar que existe un segundo método para estimar la varianza, en el cual no se requiere calcular la media de la muestra y tampoco es necesario obtener cada una de las desviaciones de la muestra.

Cabe aclarar que esta fórmula se obtiene de la original realizando algunas manipulaciones algebraicas que veremos a continuación:

Partiendo de la fórmula original tenemos que:

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\overline{x}\ \ x_i + \overline{x}^2\right)}{n-1}$$

Como la sumatoria de una suma algebraica es igual a la suma algebraica de las sumatorias por lo tanto tenemos:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\overline{x}\ \ x_i + \overline{x}^2\right)}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2}{n-1}$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$, la expresión anterior puede rescribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\ n\overline{x} + n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}{n-1}$$

Dado que $n\overline{x}^2$, es igual a $n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 = n\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n^2}\right) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}$,

entonces sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Big/ n}{n-1}$$

De esta forma se deduce la fórmula alternativa para calcular la yarianza en la cual, como ya lo mencionamos, no se tiene que calcular la media ni las desviaciones de los valores.

Como en el ejemplo de la primera fórmula, para las series de frecuencia y, de clases y frecuencias, la fórmula tiene que ser modificada en cada caso para que pueda ser aplicada. No demostraremos las operaciones para llegar a cada resultado, únicamente presentaremos el resultado final como se muestra a continuación:

Series simples	Series de frecuencia	Series de clases y frecuencias
$s_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Big/ n}{n-1}$	$s_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2 \Big/ n}{n-1}$	$s_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i \gamma_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \gamma_i\right)^2 \Big/ n}{n-1}$
Donde: x_i = Valores de x $\overline{x}$ = Valor de la media n = Número de elementos	Donde: f_i = Frecuencias	Donde: γi = Valor de la marca de clase o punto medio de la clase

Ejemplos: tomaremos los mismos datos que utilizamos para calcular la varianza con el primer método y, así comprobaremos que llegamos a los mismos resultados con este segundo método.

2.4.12 Para una serie simple

Calcular la varianza para los siguientes valores:

Puntuaciones (x_i)	x_i^2
10	100
12	144
13	169
10	100
15	225
$\sum x_i = 60$	$\sum = 738$

Aplicando la fórmula:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = (60)^2 = 3600 \quad \text{sustituyendo:}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Big/ n}{n-1} = \frac{738-(3\,600/5)}{5-1} \simeq \frac{738-720}{4} = \frac{18}{4}$$

$$s_x^2 = 4.5$$

2.4.13 Para una serie de frecuencias

Considerando los siguientes valores, calcular la varianza:

Puntuaciones (x_i)	Frecuencias (f_i)	$(f_i)(x_i)$	x_i^2	$(f_i)(x_i^2)$
2	4	8	4	16
5	1	5	25	25
6	3	18	36	108
8	4	32	64	256
	$\sum = 12$	$\sum = 63$	$\sum = 129$	$\sum = 405$

Aplicando la fórmula:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2 = (63)^2 = 3\,969 \quad \text{sustituyendo:}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2 \Big/ n}{n-1} = \frac{405-(3\,969/12)}{12-1} \simeq \frac{405-330.75}{11} = \frac{74.25}{11}$$

$$s_x^2 = 6.75$$

2.4.14 Para una serie de clases y frecuencias

Considerando los siguientes datos calcular la varianza:

Altura pulgadas	Marca de clase (γ_i)	Frecuencias (f_i)	(f_i) (γ_i)	γ_i^2	(f_i) (γ_i^2)
60-62	61	5	305	3721	18 605
63-65	64	18	1 152	4096	73 728
66-68	67	42	2 814	4489	188 538
69-71	70	27	1 890	4900	132 300
72-74	73	8	584	5329	42 632
		100	6 745		455 803

Aplicando la fórmula:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \gamma_i\right)^2 = (6\ 745)^2 = 45\ 495\ 025 \text{ sustituyendo}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \gamma_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \gamma_i\right)^2 \Big/ n}{n-1}$$

$$s_x^2 = \frac{455\ 803 - (45\ 495\ 025/100)}{100-1}$$

$$s_x^2 = \frac{455\ 803 - 454\ 950.25}{99}$$

$$s_x^2 = \frac{852.75}{99}$$

$$s_x^2 = 8.6$$

Finalmente, cabe mencionar que el cálculo de la varianza tiene algún error cuando se trata del agrupamiento; de los datos en clases, denominado error de agrupamiento; para ajustado a la realidad se utiliza **la varianza corregida:**

$$s_c^2 = s_x^2 - \frac{c^2}{12}$$

Donde c es el tamaño del intervalo de clase. La corrección se conoce como *corrección de Sheppar,* se utiliza en distribuciones continuas donde los extremos van gradualmente a cero en ambas direcciones.

Los estadísticos difieren en lo que se refiere a cuándo y si debe aplicarse la corrección Sheppard. Ciertamente no debe aplicarse sin haberse hecho un examen completo de la situación, esto se debe a que podría sobrecorregirse la muestra y así sustituir unos errores por otros.

2.4.15 Desviación estándar o desviación típica

Vale la pena recordar que se llama desviación o desvío a la diferencia entre un valor individual x_i *y* la media x *.* La varianza es una medida de dispersión en la que hallamos las desviaciones al cuadrado. Esto indica que la unidad de varianza se expresa en unidades al cuadrado.

Para superar esta insuficiencia y disponer de una medida de la dispersión de las puntuaciones que se exprese en unidades, que no sean al cuadrado, se calcula la raíz cuadrada de la varianza conocida como desviación estándar.

La desviación estándar es una de las medidas de resumen que más se utiliza para distribuciones y desempeña un papel preponderante en la estadística. Es importante observar que las unidades en las que se expresa la desviación estándar son las mismas que las de la media. Por ejemplo, si la media se da a conocer en unidades monetarias, la desviación estándar también lo estará. Si la media está en metros, lo mismo ocurrirá con la desviación estándar.

Definición: la desviación estándar a, para la población o s, para la muestra, es la desviación en promedio de las diferencias de los valores con respecto a su media.

La desviación estándar es simplemente la raíz cuadrada de la varianza. De este modo, si la varianza es 81. la desviación estándar es 9; si la varianza es de 10, la desviación estándar es $\sqrt{10} = 3.16$. Entonces se deduce que para obtener la desviación estándar se debe calcular la varianza primero y después hallar su raíz cuadrada.

Las fórmulas son las mismas que se utilizaron para la varianza, sólo que ahora se agrega el símbolo de raíz cuadrada en cada una:

Tenemos que recordar que existían dos métodos para calcular la varianza, el primero de ellos:

Series simples	Series de frecuencia	Series de clases y frecuencias
$s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$	$s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$	$s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i (\gamma_i - \overline{x})^2}{n-1}}$
Donde: x_i = Valores de x $\overline{X}$ = Valor de la media n = Número de elementos	Donde: f_i = Frecuencias	Donde: γi = Valor de la marca de clase o punto medio de la clase

Para el segundo método las fórmulas son:

Series simples	Series de frecuencia	Series de clases y frecuencias
$s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n}{n-1}}$	$s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2 / n}{n-1}}$	$s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i \gamma_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \gamma_i\right)^2 / n}{n-1}}$
Donde: x_i = Valores de x $\overline{X}$ = Valor de la media n = Número de elementos	Donde: f_i = Frecuencias	Donde: γi = Valor de la marca de clase o punto medio de la clase

Podemos realizar un ejemplo utilizando la segunda fórmula para una serie simple: calcule la desviación estándar, para esta muestra: 20, 5, 10, 15,25.

Respuesta: $\sum x_i = 20+5+10+15+25 = 75$

$$\sum x_i^2 = 202+52+102+152+252 = 400+25+100+225+625 = 1375$$

$$s = \sqrt{\frac{1375-(75^2\ /\ 5)}{5-1}} = \sqrt{62.5} = 7.91$$

Ejercicio (2.4.4): calcular la desviación estándar de los tres ejemplos anteriores para los cuales se calculó la varianza. Y lo mismo para los ejercicios de 80 y 40 datos con su respectiva interpretación.

Coeficiente de variación (dispersión absoluta y relativa): El coeficiente de variación de una distribución lo podemos definir como la expresión porcentual que representa la desviación estándar de una muestra con respecto a su media.

En algunos casos las dispersiones, en términos absolutos, pueden ser diferentes a la realidad y por ello se tienen que analizar en términos de coeficientes de variación.

El coeficiente de variación está definido por la siguiente fórmula:

$$V = \left(\frac{s}{\overline{x}}\right)(100)$$

Donde: s es la desviación estándar y x es la media.

Veamos un ejemplo: un fabricante de focos produce dos tipos de focos, *A* y *B*. Los focos tienen una duración media de $\overline{x}_A = 1495$ horas y $\overline{x}_B = 1875$ horas, respectivamente, y las desviaciones típicas o estándar son de s_A - 280 horas y s_B - 310 horas. ¿Qué tipo de foco tiene la mayor a) dispersión absoluta, b) dispersión relativa?

Respuesta:

a. Dispersión absoluta de $A = s_A$ - 280 horas; de $B = s_B = 310$ horas, entonces B tiene la dispersión absoluta mayor.

b. Coeficiente de variación:

$$V_A = \left(\frac{s_A}{\overline{X}_A}\right)(100) = \left(\frac{280}{1495}\right)(100) = 18.7\,\%$$

$$V_B = \left(\frac{s_B}{\overline{X}_B}\right)(100) = \left(\frac{310}{1875}\right)(100) = 16.5\,\%$$

Entonces el tipo de foco A es el que tiene una mayor variación o dispersión relativa.

Ejemplo: considere que un grupo de estudiantes realiza dos pruebas. La primera resulta con una media de 60 puntos y una $s = 6$ puntos y un máximo de 100 puntos. La segunda tiene una media de 700 puntos y una $s - 7$, con un máximo de 1000 puntos.

a. ¿Cuál de las dos pruebas tiene una variación o dispersión mayor?

Respuesta:

Primera prueba: $V = \left(\frac{6}{60}\right)(100) = \left(\frac{1}{10}\right)(100) = 10\,\%$

Segunda prueba: $V = \left(\frac{7}{700}\right)(100) = \left(\frac{1}{100}\right)(100) = 1\,\%$

Como se puede ver, la dispersión relativa de la segunda prueba es 1/10, de la primera.

Nota: nos indica qué tanto varían los valores con respecto a su media o cuál es la dispersión, por lo tanto, quién tiene el coeficiente de variación mayor, sus datos tienen una dispersión relativa mayor.

2.5 MEDIDAS DE ASIMETRÍA Y CURTOSIS A TRAVÉS DE MOMENTOS CON RESPECTO A LA MEDIA

En secciones anteriores se han desarrollado métodos para describir la tendencia central de un conjunto de valores: media, mediana y la moda, y también para medir su grado de dispersión: varianza y desviación estándar. Otra característica que puede medirse de un conjunto de valores es el grado de asimetría[30] y de curtosis.

Conociendo esos resultados será posible resumir eficazmente las características de un conjunto de datos con cuatro indicadores: una medida de centralización (la media), una medida de dispersión (desviación estándar), una medida de asimetría y una medida de altura (curtosis). Veamos entonces como se calculan las medidas de asimetría y curtosis.

2.5.1 Medidas de asimetría

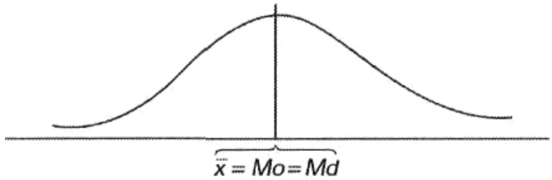
Si la representación gráfica de un conjunto de valores[31] es perfectamente simétrica, coincidirán los valores de la media, la mediana y la moda.

---

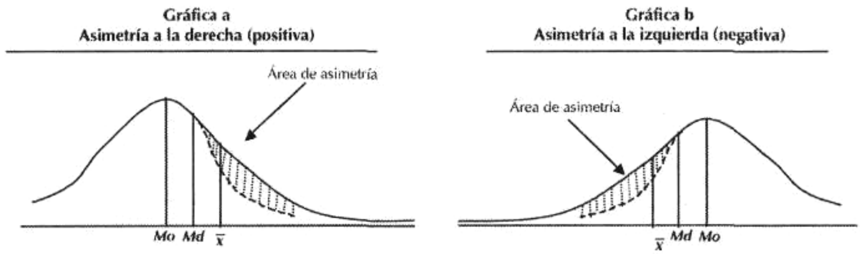
30 El término de asimetría lo utilizamos por primera vez cuando se habló de una compara ción entre la media, la moda y la mediana.

31 Si es un conjunto de valores muy grande, representaríamos gráficamente las frecuencias o las clases de los valores.

Una gráfica de este estilo quedaría de la siguiente forma:



Conforme la distribución se aleja de la simetría los tres valores se alejarán entre sí, siendo la diferencia mayor la que se encuentra entre la media y la moda (véase gráficas a y b).[32]



La asimetría es positiva o hacia la derecha, si la media es mayor a la mediana (gráfica a), y es negativa o hacia la izquierda si la mediana es mayor a la media (gráfica b).

La forma para calcular la asimetría que más se utiliza es el *coeficiente de asimetría,*[33] definido como: a_3, que también se define como el tercer momento con respecto a la media y se encuentra definida por la siguiente fórmula para cada tipo de serie:

---

[32] Esto quiere decir que cuando sabemos o estimamos que los valores de la media, la moda y la mediana son diferentes podemos pensar inmediatamente que nos encontramos frente a una distribución asimétrica y sólo hay que definir su magnitud.

[33] Algunos autores mencionan el coeficiente de asimetría utilizando el enfoque desarrollado por Kart Pearson, quien definía que la forma de calcularlo es aplicando la siguiente fórmula:

$$\textit{Coeficiente de asimetría} \qquad CA = \frac{3(\text{media} - \text{mediana})}{\textit{Desviación estándar}}$$

Series simples	Series de frecuencia	Series de clases y frecuencias
$\alpha_3 = \dfrac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{s^3}$	$\alpha_3 = \dfrac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i - \bar{x})^3}{s^3}$	$\alpha_3 = \dfrac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}f_i(\gamma_i - \bar{x})^3}{s^3}$

Donde:

S^3 = cubo de la desviación estándar

X = media aritmética

γ_i = Valor de la marca de clase o punto medio de la clase

Esta medida de la asimetría es un número relativo y, por lo tanto, puede utilizarse con fines de comparación.

Para calcular a_3, se obtiene primero la suma del cubo de las diferencias con respecto a la media, luego se divide el resultado entre el número de observaciones y el resultado que se obtiene se divide entre el cubo de la desviación estándar.

Los posibles resultados se interpretan de la siguiente forma: para una distribución simétrica, a_3, es igual a cero. Los valores positivos de a_3, indican que la asimetría de la distribución es positiva, en otras palabras, la distribución tiene un largo extremo (o cola), hacia la derecha. Los valores negativos de a_3, indican que la distribución tiene una larga cola hacia la izquierda. Entre mayor sea el valor de a_3, mayor será la asimetría de la muestra. Podemos resumir los posibles resultados en el siguiente diagrama:

$$\textit{Coeficiente de asimetría} = \alpha_3 = \begin{cases} \alpha_3 = 0, & \text{entonces la distribución es simétrica} \\ \alpha_3 > 0, & \text{entonces la distribución es asimétrica positiva} \\ \alpha_3 < 0, & \text{entonces la distribución es asimétrica negativa} \end{cases}$$

Ahora veamos un ejemplo para ver cómo se obtiene el coeficiente de asimetría a partir de los siguientes datos de las edades de treinta personas elegidas al azar.

30	32	21	37	26	43	18	37	23	35
27	44	39	39	40	40	28	39	42	40
39	42	37	40	35	37	39	25	39	22

a) Resumir la información en un cuadro de frecuencias.
b) Calcular la media y la desviación estándar.
c) Obtener la asimetría de distribución.

Solución:

a) Resumir la información en un cuadro de frecuencias:

Edades	Conteo por marcas tarjado	Personas (frecuencias)
18	I	1
21	I	1
22	I	1
23	I	1
25	I	1
26	I	1
27	I	1
28	I	1
30	I	1
32	I	1
35	II	2
37	IIII	4
39	~~IIII~~ I	6
40	IIII	4
42	II	2
43	I	1
44	I	1
		30

b) Calcular la media y la desviación estándar:

Rara calcular la media y la desviación estándar es conveniente presentar la información en una tabla que nos permita realizar los cálculos con facilidad:

Datos (x_i)	Frec. (f_i)	(f_i) (x_i)	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^3$
18	1	18	−16.5	272.25	272.25	−4492.13
21	1	21	−13.5	182.25	182.25	−2460.38
22	1	22	−12.5	156.25	156.25	−1953.13
23	1	23	−11.5	132.25	132.25	−1520.88
25	1	25	−9.5	90.25	90.25	−857.38
26	1	26	−8.5	72.25	72.25	−614.13
27	1	27	−7.5	56.25	56.25	−421.88
28	1	28	−6.5	42.25	42.25	−274.63
30	1	30	−4.5	20.25	20.25	−91.13
32	1	32	−2.5	6.25	6.25	−15.63
35	2	70	0.5	0.25	0.5	0.25
37	4	148	2.5	6.25	25	62.50
39	6	234	4.5	20.25	121.5	546.75
40	4	160	5.5	30.25	121	665.50
42	2	84	7.5	56.25	112.5	843.75
43	1	43	8.5	72.25	72.25	614.13
44	1	44	9.5	90.25	90.25	857.38
	30	1035			1573.5	−9111.00

Una vez construida la tabla procedemos a calcular la media y la desviación estándar.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n} = \frac{1035}{30} = 34.5$$

$$\overline{x} = 34.5$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = \frac{1573.5}{29} = 54.26$$

La desviación estándar es la raiz de la varianza, así que:

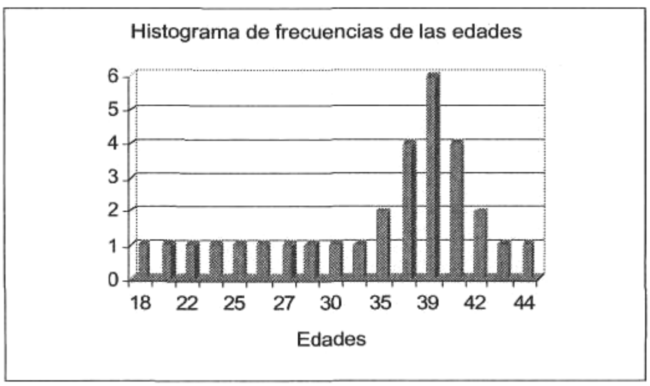
$$s = \sqrt{54.26} = 7.37$$

c) La asimetría de la distribución: Utilizamos la fórmula para el cálculo del coeficiente de asimetría en una muestra ordenada por frecuencias:

$$\alpha_3 = \frac{(1/n)\sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \overline{x}\right)^3}{s^3} = \frac{(1/30)(-9111.0)}{(7.37)^3} = \frac{-303.70}{399.67} = -0.76$$

$$\alpha_3 = -0.76$$

Podemos concluir que el valor de alfa tres es menor que cero y por lo tanto el coeficiente de asimetría nos indica que los datos presentan un sesgo negativo, es decir, presentan una larga cola hacia la izquierda. Esto lo podemos comprobar si graficamos los valores de las edades con respecto a sus frecuencias:



Como podemos observar en la gráfica, los datos de esta muestra sí presentan un sesgo negativo (es decir hacia la izquierda).

Ejercicios (2.5.1):

1. A partir de los siguientes datos de las calificaciones obtenidas en un examen de estadística:

5	7	8	5	8	5	7	7	8	7	8	7	8	8	8
6	7	6	7	7	6	7	6	8	6	10	6	8	6	8
6	8	8	9	7	10	8	7	8	7	6	7	10	8	
5	8	5	7	7	5	7	8	10	7	7	7	8	8	
6	9	6	6	6	9	7	6	7	8	6	7	6	9	
7	9	9	7	7	6	8	7	9	8	9	8	9	9	
10	6	10	8	7	9	7	7	8	9	10	6	6	7	

Se pide:

a) Resumir la información en un cuadro de frecuencias
b) Calcular la media, la desviación estándar y
c) Obtener la asimetría de la distribución.

2. Utilizando la siguiente información:

Edad	Frecuencia
1	2
2	5
3	11
4	5
5	2
	25

a) Calcular la media, la desviación estándar y
b) La asimetría de la distribución.

3. Con base en la siguiente tabla de las alturas de 100 estudiantes de la Escuela Superior de Economía:

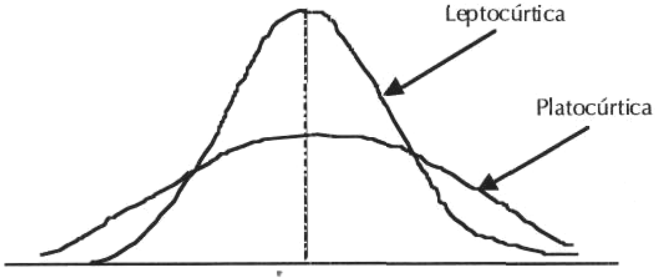
Altura (pulgadas)	Número de estudiantes
60 – 62	5
63 – 65	18
66 – 68	42
69 – 71	27
72 – 74	8
	Suma = 100

Se pide:
a) Calcular la media, la desviación estándar y
b) Calcular la asimetría de la distribución.

4. Calcular la asimetría de los ejercicios de 80 y 40 datos.

2.5.2 Medidas de curtosis (una medida de las puntas)

Dos distribuciones pueden tener la misma media, la misma desviación estándar y ser perfectamente simétricas, pero siguen siendo diferentes si una es "puntiaguda" y la otra "achatada". Las distribuciones puntiagudas y con extremos relativamente anchos reciben el nombre de *leptocúrticas,* en tanto que las que tienden a ser chatas y con colas relativamente estrechadas se llaman *platocúrticas.* Estas distribuciones, gráficamente, tienen la siguiente forma:



La manera formal para determinar la altura de una distribución es calculando el coeficiente de curtosis definido como a_4 (alfa cuatro), que también se precisa como el cuarto momento con respecto a la media, definido por la siguiente fórmula para cada tipo de serie:

Series simples	Series de frecuencia	Series de clases y frecuencias
$\alpha_4 = \frac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$	$\alpha_4 = \frac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$	$\alpha_4 = \frac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}f_i(y_i - \bar{x})^4}{s^4}$

Donde: S^4 = Elevar a la cuarta potencia la desviación estándar *X* - Media aritmética Y, = Valor de la marca de clase o punto medio de la clase

Esta medida de la altura no depende de la ubicación o varianza de la distribución y, por tanto, puede utilizarse con propósitos comparativos. La altura de la distribución "normal" es empleada comúnmente como el estándar de la altura que debe tener una distribución. Para una distribución normal, el valor del coeficiente de $a_4 = 3$. Si en otras pruebas el valor del coeficiente de curtosis es mayor que 3, la distribución es *leptocúrtica* (en punta), mientras que si es menor que 3, es *platocúrtica* (achatada).

$$\textit{Coeficiente de curtosis: } \alpha_4 \begin{cases} \alpha_4 = 3, \text{ la distribución es de tipo normal} \\ \alpha_4 > 3, \text{ la distribución es leptocúrtica} \\ \alpha_4 < 3, \text{ la distribución es platocúrtica} \end{cases}$$

Veamos cómo se aplica el coeficiente de curtosis utilizando el ejemplo anterior de las edades de 30 personas tomadas al azar.

a. Calcular el coeficiente de curtosis para la distribución.

Respuesta: si las edades de las treinta personas son las siguientes:

30	**32**	**21**	**37**	**26**	**43**	**18**	**37**	**23**	**35**
27	**44**	**39**	**39**	**40**	**40**	**28**	**39**	**42**	**40**
39	**42**	**37**	**40**	**35**	**37**	**39**	**25**	**39**	**22**

Y si el valor de la media y la desviación estándar son:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n} = \frac{1035}{30} = 34.5$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} = \frac{1573.5}{29} = 54.26$$

La desviación estándar es la raíz de la varianza, así que:

$$s = \sqrt{54.26} = 7.37$$

Entonces, aplicando la fórmula correspondiente para calcular el valor del coeficiente de curtosis, el valor que no hemos calculado es la suma de las diferencias elevadas a la cuarta potencia, pero eso resulta muy fácil si consideramos que ya tenemos calculadas las diferencias al cuadrado, basta con elevar al cuadrado estas diferencias.

Datos (x_i)	Frec. (f_i)	(f_i) (x_i)	x_i - X	$(x_i - X)^4$	$f_i(x_i - X)^4$
18	1	18	−16.5	74 120.06	74 120.06
21	1	21	−13.5	33 215.06	33 215.06
22	1	22	−12.5	24 414.06	24 414.06
23	1	23	−11.5	17 490.06	17 490.06
25	1	25	−9.5	8 145.06	8 145.06
26	1	26	−8.5	5 220.06	5 220.06
27	1	27	−7.5	3 164.06	3 164.06
28	1	28	−6.5	1 785.06	1 785.06
30	1	30	−4.5	410.06	410.06
32	1	32	−2.5	39.06	39.06
35	2	70	0.5	0.06	0.13
37	4	148	2.5	39.06	156.25
39	6	234	4.5	410.06	2 460.38
40	4	160	5.5	915.06	3 660.25
42	2	84	7.5	3 164.06	6 328.13
43	1	43	8.5	5 220.06	5 220.06
44	1	44	9.5	8 145.06	8 145.06
	30	1035		185 896.06	193 972.88

Para calcular el coeficiente de curtosis de la distribución utilizaremos la fórmula para una muestra ordenada en frecuencias:

$$\alpha_4 = \frac{(1/n)\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^4}{s^4} = \frac{(1/30)(193\ 972.88)}{(7.37)^4} = \frac{6\,465.76}{2\,950.33} = 2.19$$

$$\alpha_4 = 2.19$$

Podemos concluir que como el valor del coeficiente de curtosis es menor que tres, entonces la distribución se puede considerar del tipo platocúrtica o achatada.

Finalmente, presentaremos un cuadro que resume los cuatro momentos con respecto a la media y lo que determina cada uno de ellos:

Momentos con respecto a la media	Series simples	Series de frecuencia	Series de clases y frecuencias	Aplicación:
Primer momento m_1	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^1}{n} = 0$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^1}{n} = 0$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (\gamma_i - \bar{x})^1}{n} = 0$	Encontrar la media por otros métodos abreviados.
Segundo momento m_2	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = s^2$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = s^2$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (\gamma_i - \bar{x})^2}{n} = s^2$	Encontrar la varianza y la desviación estándar, puesto que: $m^2 = s^2$
Tercer momento m_3	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{n} = m_3$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^3}{n} = m_3$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (\gamma_i - \bar{x})^3}{n} = m_3$	Sirve como medida absoluta de asimetría y se aplica: $\alpha_3 = m_3 / s^3$
Cuarto momento m_4	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{n} = m_4$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^4}{n} = m_4$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (\gamma_i - \bar{x})^4}{n} = m_4$	Sirve para calcular la altura de una distribución y se aplica: $\alpha_4 = m_4 / s^4$

Ejercicios (2.5.2):

1. Calcular el coeficiente de curtosis para los ejercicios de 80 y 40 datos y de los ejercicios de la sección anterior a los que se calculó la asimetría.

2. Mónica Adriana trabaja para la compañía Mantenimiento del hogar, S.A. de C. V, su trabajo consiste en ofrecer el servicio de cuidado de jardín por vía telefónica. A continuación se indica el número de citas que hizo en cada una de las últimas 25 horas de llamadas:

9	5	2	6	5	6	4	4	7	2
3	6	3	4	4	7	8	4	4	5
5	4	8	3	3					

a. Construya un cuadro donde se muestre la distribución de fre cuencias de las llamadas por hora.
b. Calcule la media.
c. Calcule la varianza y la desviación estándar.
d. Calcule e interprete el coeficiente de asimetría.
e. Calcule e interprete el coeficiente de curtosis.

3. Una muestra de familias que tienen contrato con la compañía telefónica Avantel, registró los siguientes números de llamadas recibidas la semana pasada:

52	43	30	38	30	42	12	46
34	46	32	18	41	5	39	37

a. Construya un cuadro donde se muestre la distribución de fre cuencias de las llamadas recibidas.
b. Calcule la media.
c. Calcule la varianza y la desviación estándar.
d. Calcule e interprete el coeficiente de asimetría.
e. Calcule e interprete el coeficiente de curtosis.

2.6 Teorema de Tchebyshev

En las secciones anteriores hemos estudiado medidas de tendencia central (media, moda y mediana), y medidas de dispersión (varianza y desviación estándar). También estudiamos el grado de asimetría (sesgo) de una distribución y su curtosis (altura). Es decir, ya podemos describir, en términos generales, el comportamiento de un conjunto de valores que estemos estudiando.

Retomando el concepto de desviación estándar, diremos que una de las aplicaciones que tiene es que podemos utilizarlo para conocer aproximadamente cuántas de las puntuaciones se agrupan en ciertos intervalos de la serie formados por la suma y la resta de una, dos o tres veces el valor de la desviación estándar con respecto al valor medio. Para esto es que estudiaremos el Teorema de Tchebyshev.

Hace más de un siglo, el matemático ruso P. L. Tchebyshev (1821-1894), examinó por separado la propiedad de la variabilidad de los datos en torno a la media; encontró que, sin importar cómo se distribuye un conjunto de datos, el porcentaje de observaciones que están contenidas dentro de distancias de ±*k* desviaciones estándar alrededor de la media, se encuentra definido por la siguiente fórmula:

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)x100$$

Para entender mejor el resultado del teorema veamos algunos valores que se obtienen aplicando la fórmula: Para $k = 2$, el teorema nos dice que:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)x100 = \left(1-\frac{1}{4}\right)x100 = \left(1-0.25\right)x100 = 75\%$$

Cuando menos 75% de las observaciones caen en ±2 desviaciones estándar con respecto a la media y también se puede expresar utilizando un intervalo definido como (x-2s) a (x+2s). Cuando menos 88.89% de las observaciones estarán entre la media +3 desviaciones estándar, y entre la media -3 desviaciones estándar y al menos 93.75% de los valores se encontrarán entre la media y ±4 desviaciones estándar.[34]

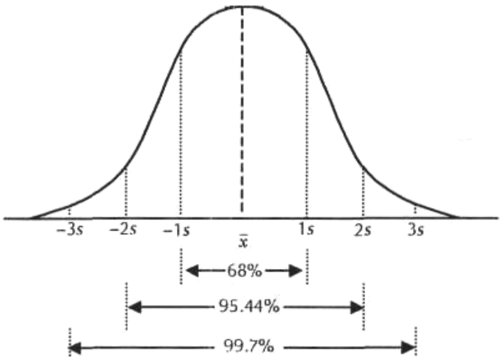
Aunque el Teorema de Tchebyshev es de naturaleza general y se puede aplicar a cualquier clase de distribución de valores, si los datos fueran simétricos y acampanados,[35] es decir, de tipo normal, exacta-

---

34 Aunque *k-2* y *k=3,* se utilizan comúnmente al aplicar el teorema, el número *k* no tiene que ser forzosamente un entero podría ser 2.5 desviaciones estándar, y cuando *k* = 2.5, 84% de las observaciones se encontrarían dentro de ese intervalo.

35 Algunos autores llaman a estos resultados "regla empírica" o "regla normal".

mente 68.26% de todas las observaciones estarían contenidas dentro de distancias de ±1 desviación estándar alrededor de la media, mientras que 95.44, 99.73 y 99.99% de las observaciones estarían incluidas, respectivamente, dentro de distancias de ±2, ±3, ±4 desviaciones estándar alrededor de la media; gráficamente se ve de la siguiente forma:



Los resultados del porcentaje de puntuaciones que se concentran en torno a la media, para cualquier tipo de distribución y para distribuciones de tipo normal los podemos resumir en la siguiente tabla:

Porcentaje de observaciones contenidas entre la media y $\pm k$ desviaciones

K unidades de desviación estándar	Cualquier distribución Tchebyshev	Distribución normal
1	0	Exactamente 68.26%
2	Cuando menos 75%	Exactamente 95.44%
3	Cuando menos 88.89%	Exactamente 99.73%
4	Cuando menos 93.75%	Exactamente 99.99%

Ejemplo: Retomando el ejemplo de las edades de treinta personas tomadas al azar en el cual se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias:

Edades	Personas (frecuencias)
18	1
21	1
22	1
23	1
25	1
26	1
27	1
28	1
30	1
32	1
35	2
37	4
39	6
40	4
42	2
43	1
44	1
	Suma = 30

a. Compruebe que dentro del intervalo de ±2 desviaciones estándar se encuentra cuando menos 75% de las observaciones de la muestra.

Respuesta:

Para aplicar la fórmula del Teorema de Tchebyshev necesitamos primero calcular la media y la desviación estándar de los valores. Pero como ya previamente los habíamos calculado, sólo los retomaremos:

$$\overline{x} = 34.5 \quad ; s = \sqrt{54.26} = 7.37$$

Ahora, aplicando la fórmula para *k- 2* desviaciones estándar, el teorema afirma que:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)x\,100 = \left(1-\frac{1}{4}\right)x\,100 = \left(1-0.25\right)x\,100 = 75\,\%$$

Lo que indica que cuando menos 75% de las observaciones caen en el intervalo de $(\bar{x}-2s)$ a $(\bar{x}+2s)$.

Comprobemos que esto se cumple para nuestras observaciones. El intervalo es el siguiente:

Realizando las operaciones tenemos:

$$\left(\bar{x}-2s\right) \quad a \quad \left(\bar{x}+2s\right) = \left(34.5-2\left(7.37\right)\right) \quad a \quad \left(34.5+2\left(7.37\right)\right)$$

$$\left(34.5-14.74\right) \quad a \quad \left(34.5+14.74\right) = 19.76 \quad a \quad 49.24$$

Interpretación: Presentando los valores obtenidos en términos redondeados podemos decir que el intervalo formado por ±2 desviaciones estándar con respecto a la media contiene edades de 20 a 49 años. Ahora bien, cuántas puntuaciones de nuestra serie se encuentran dentro de ese intervalo. Si observamos nuestra tabla de distribución de frecuencias podemos ver que las edades varían de los 1 § a los 44 años, en este caso de los 20 a los 49 años se encuentran 29 de las 30 observaciones, es decir, (29/30) x 100 - 96.66%, de las observaciones que se encuentran contenidas en el intervalo obtenido aplicando la fórmula deTchebyshev. Finalmente podemos concluir que, efectivamente, se encuentra cuando menos 75% de las observaciones contenidas dentro del intervalo.

Ejercicios (2.6.1):

Utilizando los ejercicios de las secciones anteriores (asimetría y curtosis), que se mencionan a continuación, determine si realmente se cumplen las afirmaciones hechas en el Teorema de Tchebyshev, por lo menos para ±2 y ±3 desviaciones estándar en cada uno de ellos.

1. A partir de los siguientes datos de las calificaciones que se obtuvieron en un examen de estadística:

5	7	8	5	8	5	7	7	8	7	8	7	8	8	8
6	7	6	7	7	6	7	6	8	6	10	6	8	6	8
6	8	8	9	7	10	8	7	8	7	6	7	10	8	
5	8	5	7	7	5	7	8	10	7	7	7	8	8	
6	9	6	6	6	9	7	6	7	8	6	7	6	9	
7	9	9	7	7	6	8	7	9	8	9	8	9	9	
10	6	10	8	7	9	7	7	8	9	10	6	6	7	

Se pide:

a) Resumir la información en un cuadro de frecuencias.
b) Calcular la media y la desviación estándar.
c) Determinar si realmente se cumplen las afirmaciones hechas en el Teorema de Tchebyshev, por lo menos para ±2 y ±3 desviaciones estándar.

2. Utilizando la siguiente información:

Edad	Frecuencia
1	2
2	5
3	11
4	5
5	2
	25

a) Calcular la media y la desviación estándar.

b) Determinar si realmente se cumplen las afirmaciones hechas en el Teorema de Tchebyshev, por lo menos para ±2 y ±3 desviaciones estándar.

3. Con base en la siguiente tabla de las alturas de 100 estudiantes de la Escuela Superior de Economía:

Altura (pulgadas)	Número de estudiantes
60 – 62	5
63 – 65	18
66 – 68	42
69 – 71	27
72 – 74	8
	100

a) Calcular la media y la desviación estándar.
b) Determinar si realmente se cumplen las afirmaciones hechas en el Teorema de Tchebyshev, por lo menos para ±2 y ±3 des viaciones estándar.

4. Una muestra de cantidades mensuales de dinero destinadas a alimentos por una persona de la tercera edad que vive sola, tiene aproximadamente una distribución de frecuencias simétrica de campana. La media muestral es de $150.00 pesos; la desviación estándar es de $20.00 pesos. Utilizando el enfoque para una distribución de tipo normal se pide:

a. Aproximadamente, ¿entre qué cantidades (intervalo) se encuentra 68% de los gastos mensuales en alimentos?
b. Aproximadamente, ¿entre qué cantidades (intervalo) se encuen tra 95% de los gastos mensuales en alimentos?

c. Aproximadamente, ¿entre qué cantidades (intervalo) se encuentran todos los gastos mensuales en alimentos?

5. En lo que respecta al Teorema de Tchebyshev, ¿al menos qué porcen taje de cualquier conjunto de observaciones se encontrará a 1.8 des viaciones estándar de la media?
6. El ingreso promedio para un grupo de observaciones muéstrales es de \$500.00 pesos, la desviación estándar es de \$40.00 pesos. De acuerdo con el Teorema de Tchebyshev, ¿al menos qué porcentaje de los ingresos se encontrará entre \$400.00 y \$600.00 pesos?
7. La distribución de los pesos de una muestra de 1400 contenedores para carga tiene aproximadamente una distribución normal. Utilizando el enfoque para una distribución de tipo normal, ¿qué porcentaje de pesos se encontrarán entre (x-2s) y (x+2s)?

3. TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Las cifras no mienten, pero los mentirosos también usan cifras.

ANÓNIMO

Objetivos:

Al finalizar el capítulo el alumno será capaz de:

- Definir los conceptos básicos de probabilidad como son: observación, experimentación, espacio muestral y eventos.
- Explicar los distintos enfoques del concepto de probabilidad.
- Aplicar el principio fundamental del conteo.
- Aplicar los axiomas y reglas de probabilidad.
- Aplicar la probabilidad para eventos dependientes e indepen dientes.
- Aplicar el concepto de probabilidad condicionada en la solu ción de problemas.
- Aplicar el Teorema de Bayes.

INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se han examinado algunos métodos para la recolección, reducción, presentación y descripción de un conjunto de datos. En este capítulo se comienza el estudio de diversas reglas básicas que se pueden utilizar para evaluar la probabilidad de que ocurran diferentes fenómenos. La finalidad de la teoría de la probabilidad es hacer inferencias o deducciones relacionadas con una población tomando como base diversos muéstreos estadísticos.

La utilización de la probabilidad se remonta al siglo xvi, las primeras aplicaciones se relacionaban básicamente con los juegos de azar. En la actualidad son muchas las aplicaciones de la probabilidad; por ejemplo: se usa en los juegos de azar como loterías, casinos, carreras de caballos y deportes; sin embargo, el uso de la probabilidad va más allá de los juegos de azar. En la actualidad, los gobiernos, las empresas y las organizaciones profesionales utilizan la teoría de la probabilidad en su cotidiano proceso de toma de decisiones.

En cualquier aplicación particular, el empleo de las probabilidades indica que existe algún elemento aleatorio o de incertidumbre relacionado con la ocurrencia o no ocurrencia de algún evento futuro. Así, en muchos casos, puede ser imposible predecir qué pasará, pero es posible deducir lo que podría pasar con algún grado de certidumbre. Por ejemplo, si se tira una moneda (legal) al aire, no se puede decir con seguridad si caerá águila o sol. Sin embargo, combinando el raciocinio, la experiencia y los datos históricos, con frecuencia es factible decir cuan probable es que suceda algún evento futuro.

Existen muchos ejemplos en los negocios y en las actividades del gobierno en los que interviene algún elemento aleatorio. Por ejemplo, predecir cuánta demanda tendrá un producto nuevo en el mercado, estimar el costo de producción, pronosticar las fallas en las cosechas, comprar seguros, contratar a un nuevo empleado, presupuestar, predecir la reacción de los gobiernos extranjeros ante un cambio en la política de defensa, calcular qué impacto tendrá en la inflación una rebaja en los impuestos, etcétera.

Las probabilidades pueden servir para desarrollar estrategias. Por ejemplo, algunos automovilistas parecen mostrar una mayor tendencia a aumentar la velocidad si creen que existe un riesgo pequeño (probabilidad pequeña) de ser multados; los inversionistas estarán más dispuestos a invertir su dinero si las probabilidades de ganar son buenas; y usted se llevará el impermeable si las probabilidades de lluvia son altas. En forma semejante una Compañía puede estar más dispuesta a negociar con un sindicato si existe una severa amenaza de huelga, a invertir en la compra de equipo nuevo de creer que existe una buena probabilidad de recuperar ese dinero, etcétera.

El punto central en todos los casos es la capacidad de cuantificar cuan probable es determinado el evento.

En este capítulo como ya se mencionó, estudiaremos las definiciones y reglas que se pueden utilizar para estimar probabilidades.

3.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

3.1.1 Observación y experimentación

Los datos que se utilizan en estadística son obtenidos al observar sucesos no controlables en la naturaleza, o bien, bajo condiciones controladas en un laboratorio. Para describir cualquiera de los dos procedimientos de recolección de información o datos, utilizamos el concepto de experimento. Un experimento es el proceso por medio del cual una observación y observaciones son registradas.

A continuación se presentan algunos ejemplos de experimentos en donde se obtienen observaciones que se realizan cotidianamente:

a. Registrar el ingreso mensual de un trabajador durante dos años.
b. Entrevistar a un consumidor para determinar la marca preferi da de un producto.

c. Registrar el valor de una acción de bolsa en un momento deter minado por día, mes, año, etcétera.
d. Inspeccionar una línea de ensamblaje para determinar si el número de artículos defectuosos excede a los especificados.

En resumen: experimento es cualquier suceso que se desea investigar y que al analizarlo se obtienen resultados, los cuales llamamos "observaciones" de ese experimento.

3.1.2 Espacio de resultados o espacio muestra!

Antes de entrar en materia tenemos que definir el concepto de conjunto como un grupo de objetos o elementos (observaciones), que tienen ciertas características comunes. Por ejemplo: los habitantes de la ciudad de Monterrey, las estaciones de la línea uno del metro, las escuelas del IPN, los estudiantes de la clase de estadística descriptiva, etcétera.

Es importante definir cuidadosamente qué elementos constituyen al conjunto de interés para estar en condiciones de decidir si un objeto dado pertenece o no al conjunto.

Considerando este punto podemos ampliar la definición de conjunto que mencionamos anteriormente:

Conjunto: es un grupo de objetos o elementos con características comunes y bien definidas.

Existen dos formas para describir los elementos de un conjunto: por enumeración y por extensión. Enumerar todos (o los suficientes de ellos de manera que quede de manifiesto que forman parte del conjunto). Dicha enumeración se encierra entre llaves. Un segundo método para indicar los elementos de un conjunto es por extensión y se refiere a establecer una regla, o bien, definir las características comunes de los elementos de un conjunto.

Veamos algunos ejemplos de los dos casos:

Enumeración: conjunto A - {Pérez, Álvarez, Sánchez}

Extensión: conjunto B = *[x \x* es un número entero positivo menor que 9}

conjunto C = {Alumnos que aprobaron el examen de estadística}

Concepto de *espacio de resultados o espacio muestra!:* es el conjunto de todos los resultados u observaciones posibles de un experimento o muestra.

El conjunto de todos los puntos muéstrales de un experimento es llamado espacio de resultados y es representado por la letra 5 (donde S es la totalidad de puntos muéstrales).

Ejemplo: El lanzamiento de una dado legal, de seis caras es un experimento y obtener el número 3 es un resultado (o suceso); el espacio de resultados en este experimento sería todo el conjunto de resultados que se pueden obtener.

$$5= \{1,2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Una vez comprendidos los conceptos de experimento, resultado y espacio de resultados, podemos definir el concepto de:

3.1.3 Evento (s)

Se llama evento a todo resultado o suceso producto de un experimento.

Ejemplo: en el caso del lanzamiento del dado a cada resultado se le llama evento, y el conjunto de ellos son los eventos posibles de ese experimento.

Los eventos pueden ser de dos tipos: simples o compuestos.

Un evento compuesto es aquel que contiene dos o más eventos simples, y un evento simple es aquel que se refiere únicamente a él mismo o no contiene otros elementos.

Ejemplo: retomando el experimento del lanzamiento del dado, algunos de los eventos o resultados posibles serían:

Evento A: se obtiene un número impar
Evento B: se obtiene un número menor que 4
Evento E_1: se obtiene el número 1
Evento E_2: se obtiene el número 2
Evento E_3: se obtiene el número 3
Evento E_4: se obtiene el número 4
Evento E_5: se obtiene el número 5
Evento E_6: se obtiene el número 6

Se pueden obtener más eventos posibles para este experimento pero con éstos es suficiente. Nótese la diferencia entre los eventos A y B y los eventos *E*^ y f_2.

El evento A ocurrirá si los eventos *E-¡,* f_3 o E_5 suceden indistintamente, esto es, si se observa 1, 3 o 5. En otras palabras A está compuesto por una colección de eventos simples, a saber £$_{1;}$ f_3 y E_5. De manera análoga B ocurrirá si E_v E_2 o f_3 ocurre y puede verse como una colección de eventos simples. En contraposición a lo anterior, nótese que es imposible descomponer a cualquiera de los eventos £j,..., E_6. Estos eventos son llamados eventos simples y, *A y B* son eventos compuestos.

Otro aspecto importante en relación con los eventos es la consideración de cómo se relacionan entre sí. Los términos "complemento", "mutuamente excluyente" e "independientes", se utilizan para describir algunas de dichas relaciones.

Las relaciones mutuamente excluyentes e independientes las veremos más adelante; aquí sólo veremos el caso del complemento de un evento, el cual podemos definir como: todos los resultados del espacio muestral que no forman parte de él. Por ejemplo, en el caso del evento

A, que se refiere a los números impares obtenidos al lanzar el dado, el complemento de este evento serían los números pares que son parte del espacio muestral pero que no son considerados para ese evento. Cuando hablemos de complemento lo denotaremos agregando una barra superior a la letra del evento correspondiente, como se muestra a continuación:

$$\overline{A} = \{1,\ 3,\ 5\}$$

$$\overline{A} = \{2,\ 4,\ 6\}$$

3.2 DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD: DIFERENTES ENFOQUES

En realidad no existe una definición universalmente aceptada para el concepto de probabilidad, así que presentaremos algunas para que el lector pueda tomar la que considere mejor:

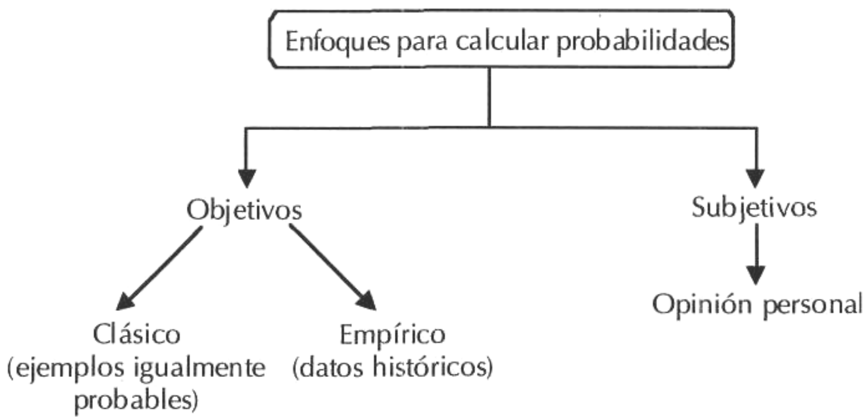
a. Es un mecanismo que permite el uso de información parcial, la con tenida en la muestra, para inferir sobre la naturaleza de un conjunto mayor de datos, la población.
b. La probabilidad se utiliza para expresar cuan probable es determina do evento.
c. Medida de qué tan posible es que ocurra un suceso dado.
d. La palabra probabilidad se utiliza para cuantificar nuestra creencia de que ocurra un acontecimiento determinado.[36]
e. Siempre que se toma una decisión hay una considerable incertidumbre, y por ello es importante evaluar científicamente todos los ries gos conocidos. Para esto se utiliza la teoría de la probabilidad a la que a menudo se le ha llamado teoría de la incertidumbre. La teoría

[36] Napoleón Labastida López, *Estadística* /, Instituto Politécnico Nacional, México, 1991, pp. 179.

de la probabilidad permite, con poca información, analizar los riesgos y minimizar los peligros de una mala decisión.[37]

3.2.1 Tres fuentes de probabilidad (diferentes enfoques)

Antes de profundizar en la forma como se utilizan las probabilidades es conveniente saber de dónde provienen. Hay tres formas de calcular o estimar probabilidades. El enfoque clásico, el enfoque empírico y el enfoque subjetivo. Los dos primeros se consideran objetivos en tanto que el último, como su nombre lo índica, es subjetivo.



Seleccionar el enfoque que se utilizará para calcular la probabilidad de algún evento depende de la naturaleza de la situación. Cabe mencionar que la letra *P* se utiliza para designar la probabilidad de un evento, por ejemplo: se escribe *P(A)* y se debe leer como "la probabilidad de ocurrencia de un evento *A* en un experimento".

Pasemos ahora al estudio de estos enfoques y también a la forma en que cada uno de ellos calcula la probabilidad.

---

[37] Douglas Lind A. y Robert Masón C, *Estadística para administración y economía,* McCraw-Hiil, México, 2001, pp. 121.

Enfoque clásico: Este enfoque es el que se utiliza en situaciones donde los eventos tienen resultados igualmente probables, por ejemplo, los juegos de azar, entre los que se encuentran el tiro de monedas, de dados y cartas.

En eventos de este tipo la probabilidad de cada resultado se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$P(\text{cada resultado}) = \frac{1}{\text{número de resultados posibles}}$$

Ejemplos:

1. De un mazo de 52 cartas, la probabilidad de sacar cualquier carta es:

$$P(\text{cada carta}) = \frac{1}{52}$$

2. El espacio muestral de tirar una moneda legal, presenta dos resultados: águila o sol; la probabilidad de que caiga águila o sol es:

$$P(\text{águila}) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(\text{sol}) = \frac{1}{2}$$

3. La probabilidad de obtener una determinada cara al tirar un dado de seis caras es:

$$P(\text{una cara cualquiera}) = \frac{1}{6}$$

4. La probabilidad de sacar una canica cualquiera de una urna que contiene 20 canicas es:

$$P(\text{una canica}) = \frac{1}{20}$$

El enfoque clásico también se puede aplicar a eventos que comprenden dos o más resultados. Para estos casos la fórmula tendría que ser modificada de la siguiente forma:

$$P(A) = \frac{\text{Núm. de resultados favorables}}{\text{número total de resultados}}$$

Ejemplos:

5. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una de las cuatro reinas de un mazo de 52 cartas? Aplicando la fórmula que acabamos de mencionar:

$$P(\text{reina}) = \frac{4 \text{ reinas}}{52 \text{ cartas}} = \frac{4}{52}$$

6. La empresa Seguros Monterrey, estudió las causas de muertes accidentales en los hogares y compiló un archivo que incluía 350, de las cuales 160 muertes fueron por caídas, 120 por envenenamiento y 70 causadas por quemaduras.

   Si se escoge aleatoriamente una de estas muertes, calcule la probabilidad de que se haya debido a envenenamiento.

   Respuesta: el total de muertes se obtiene sumando 160 + 120 + 70 = 350. Con elección aleatoria, las 350 muertes son igualmente probables y si aplicamos la fórmula:

$$P(\text{envenenamiento}) = \frac{\text{núm. de muertes por veneno}}{\text{núm. total de fallecimientos}} = \frac{120}{350} = 0.343$$

Interpretación: existe una probabilidad de 0.343 o de 34.3% de seleccionar una persona cuya causa de fallecimiento haya sido por envenenamiento.

7. Determine la probabilidad de que un matrimonio con tres hijos tenga exactamente dos niños. Suponga que teóricamente es igualmente probable que nazca un niño o una niña, y que el género de cualquiera no influye en el género de otro hijo.

   Respuesta: primero hay que construir el espacio muestral que identifica todos los resultados posibles utilizando un diagrama de árbol, los resultados finales son los siguientes. Todos tienen la misma posibilidad de nacer.

Nacimientos

	Primero	Segundo	Tercero
	Niño	Niño	Niño
(*)	Niño	Niño	Niña
(*)	Niño	Niña	Niño
	Niño	Niña	Niña
(*)	Niña	Niño	Niño
	Niña	Niño	Niña
	Niña	Niña	Niño
	Niña	Niña	Niña

(*) Exactamente dos niños

De los ocho posibles resultados tres corresponden a exactamente dos niños, así que la probabilidad en ese caso es:

$$P\,(2 \text{ niños en tres intentos}) = \frac{3}{8} = 0.375 \times 100 = 37.5\%$$

Interpretación: hay una probabilidad de 0.375 o 37.5% de que en un matrimonio con tres hijos exactamente dos de ellos sean niños.

Enfoque empírico (datos históricos o frecuencia relativa): El enfoque clásico de la asignación de probabilidades está limitado a situaciones en las que los resultados son igualmente probables. Pero en la realidad son muchos los que no son de este tipo. Por ejemplo, suponga que se tira una moneda irregular y cabe preguntarse si es igualmente probable que caiga águila o sol. Una forma de dar respuesta a esta pregunta es obtener algunos datos en forma empírica en un intento por estimar las probabilidades. De este modo puede ser razonable pensar en lanzar la moneda cierto número de veces y observar los resultados a manera de experimento sencillo para probar el supuesto de que se obtienen resultados igualmente probables. Si se tira la moneda 100 veces y cae sol en 60, puede ser razonable estimar la probabilidad de soles respecto de tiradas futuras como 60/100 = 0.60 o 60 por ciento.

Al estimar probabilidades con el enfoque de frecuencia relativa obtenemos una aproximación, no un valor exacto. A medida que aumenta el número total de observaciones, las aproximaciones correspondientes tienden a acercarse a la probabilidad real.

Esta propiedad se expresa como un teorema conocido como ley de los grandes números que dice: "A medida que un experimento se repite una y otra vez, la probabilidad calculada por frecuencia relativa de un evento tiende a acercarse a la probabilidad real."

Por ejemplo: si se realiza una encuesta de opinión con una docena de personas es posible que los resultados no sean representativos de toda la población, pero si la encuesta se hace con miles de personas seleccionadas al azar, los resultados de la muestra serán mucho más cercanos a los valores verdaderos de la población.

En la actualidad no es del todo esencial realizar un experimento para obtener datos de muestreo. En muchos casos se dispondrá de información histórica, la cual se puede utilizar precisamente de la misma manera. Estos datos históricos pueden estar publicados como resultado de ensayos anteriores o simplemente como información acumulada en los archivos de una empresa.

Ejemplos:

8. Determinar la probabilidad de que una persona seleccionada aleatoriamente sea alcanzada por un rayo este año.

   Respuesta: el espacio de muestra consiste en estos dos sucesos simples. La persona seleccionada es alcanzada por un rayo o no. Dado que estos sucesos simples no son igualmente probables debemos usar una aproximación empírica (o de frecuencia relativa). No es práctico realizar experimentos pero podemos apoyarnos en datos históricos. En EUA, en un año reciente, 371 personas fueron alcanzadas por un rayo. En una población de unos 260 millones, la probabilidad de ser fulminado por un rayo en un año se puede estimar de acuerdo con los datos históricos como:

$$P(\text{un rayo}) = \frac{371}{260\ 000\ 000} = 0.0000142$$

   Observación: Si quisiéramos formalizar más, diríamos que la fórmula es la misma que hemos trabajado, sólo que ahora se trata de datos históricos y queda de la siguiente forma:

$$P(A) = \frac{\text{núm. de veces que ha ocurrido } A \text{ (datos históricos o empíricos)}}{\text{núm. total de elementos del experimento}}$$

9. Para escoger entre varios fabricantes de computadoras, un agente de compras desea conocer la probabilidad de que una computadora personal se descomponga durante los primeros dos años. Determine esa probabilidad.
   Respuesta: sólo hay dos resultados posibles: que la computadora personal se descomponga durante los dos primeros años o no lo haga. Dado que la probabilidad de que ocurra uno de los eventos es desigual, hay que utilizar la aproximación de frecuencia relativa. Esto requiere de la búsqueda de una solución para poder observar un gran número de computadoras personales. En una encuesta de PC

World efectuada entre cuatro mil usuarios de computadoras personales se reveló que 992 tuvieron desperfectos durante los dos primeros años. Con base en ese resultado estimamos que la probabilidad de que una computadora personal se descomponga durante los dos los primeros años es de:

$$P(\text{comp. defect.}) = \frac{992}{4\ 000} = 0.248$$

10. Si se escoge un año al azar encuentre la probabilidad de que el día del padre caiga en a) sábado, b) domingo.

Respuesta:

a) El día del padre siempre se celebra el segundo domingo de junio. Por tanto, resulta imposible que el día del padre caiga en sábado. Cuando un suceso es imposible decimos que su pro babilidad es cero (evento nulo).
b) Es seguro que el día del padre caerá en domingo. Cuando hay la certeza de que un suceso ocurra decimos que la probabili dad es de 1 (evento seguro).

Enfoque subjetivo: Las probabilidades obtenidas mediante el enfoque clásico o el empírico reciben el nombre de probabilidades objetivas, ya que se derivan de hechos. Sin embargo, existen numerosas situaciones en las que no se puede emplear el enfoque objetivo, es decir, situaciones en las que los resultados no son igualmente probables, y no se dispone fácilmente de los datos históricos; en estos casos se debe hacer una evaluación o estimación subjetiva de la probabilidad. Por ejemplo, cómo se calcularían las probabilidades de: ¿Se enamorará usted la próxima semana?, ¿qué calificación obtendrá en el siguiente examen?, ¿cuándo estallará una huelga laboral?, ¿crecerá un árbol derecho y alto?, ¿se podrá curar una persona gravemente enferma? En situaciones como éstas alguien debe establecer la probabilidad de que ocurra el evento desde dichas condiciones.

Una probabilidad conjeturada o estimada basada en el conocimiento de las circunstancias pertinentes se denomina probabilidad subjetiva, también se define como una evaluación personal de las posibilidades de que ocurra un evento. Cabe mencionar que todo lo probable es posible, pero no todo lo posible es probable.

Finalmente podemos decir que las probabilidades subjetivas son el resultado de un esfuerzo por cuantificar nuestros sentimientos o creencias respecto a algo. Este enfoque presenta ciertas desventajas entre las cuales se encuentran las siguientes:

a. Las estimaciones subjetivas suelen ser difíciles de comprobar si son cuestionadas.
b. Los prejuicios pueden influir. Las ¡deas preconcebidas respecto a lo que debería suceder pueden afectar la subjetividad, así como los sentimientos acerca de lo que uno quiera que suceda.

3.3 ELEMENTOS DE ANÁLISIS COMBINATORIO: PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO: PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Para utilizar el enfoque clásico de la probabilidad es necesario conocer el número total de resultados posibles de una muestra o experimento. Las técnicas de conteo se utilizan generalmente como medio para determinar el número total de resultados posibles de un experimento.

Veamos un ejemplo que nos ilustra la forma en que se puede complicar el cálculo de probabilidades si no se cuenta con una técnica de conteo.

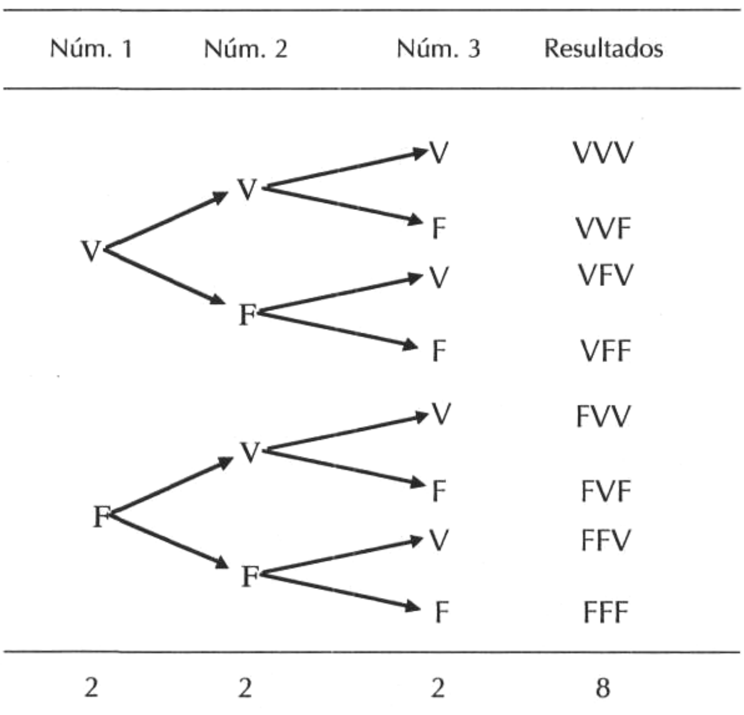
Suponga que un estudiante presenta un examen con 20 preguntas que se responden con el criterio de verdadero o falso. Suponga también que está adivinando todas las preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que resuelva correctamente el examen? Para solucionar este problema, en primer lugar, es necesario determinar el número total de resultados posibles, por ejemplo puede decidir contestar todas las preguntas con verdadero o todas con falso, o bien, puede alternar verdadero y falso, o mezclar aleatoriamente las respuestas.

Exploremos el problema por etapas. Primero, imagínese que el examen consta de una sola pregunta. Las posibilidades serían V o F. Si fueran dos preguntas estas posibilidades serían VV, VF, FV, FF. En el caso que fueran tres preguntas, las posibilidades serían, VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF.

Evidentemente, a medida que aumenta el número de preguntas, aumenta el número de resultados posibles en una forma más rápida.

Podemos ver esto utilizando un diagrama de árbol o arborescencia:

Pregunta



Al ampliar el diagrama de árbol es posible enumerar los resultados con más preguntas de verdadero-falso, pero no es práctico hacerlo debido a que el número de posibilidades aumenta considerablemente. Sin embargo, lo que realmente se requiere, es determinar el número total de resultados y para eso sirven las reglas de conteo.

Otro ejemplo sería el de lanzar 10 veces una moneda al aire y calcular el número de resultados posibles (como ejercicio el lector lo puede realizar). Sin embargo, para simplificar el trabajo de encontrar el resultado deseado estudiaremos el principio fundamental del conteo:

Reglas de conteo: Cada regla de probabilidad estudiada hasta ahora ha incluido el conteo de resultados favorables con respecto a su total. Sin embargo, en muchos casos, debido al gran número de posibilidades no es factible formular cada uno de los resultados. En tales circunstancias se han elaborado reglas para el conteo, las cuales veremos a continuación.

Retomando el ejemplo del lanzamiento de una moneda en diez ocasiones ¿Cómo se determinaría la cantidad de posibles resultados diferentes, es decir, la sucesión de águila y sol?

Regla de conteo 7: Si cualquiera de *k* eventos diferentes, mutuamente excluyentes[38] pueden ocurrir en cada una de las *n* pruebas, el número de posibles resultados es:

k»

Donde:
k - posibles resultados *y n* - número de lanzamientos o veces que se repite el experimento.

---

[38] Más adelante se define el concepto de excluyente y su utilización en el cálculo de probabilidades, pero como en este ejemplo se menciona, diremos que los eventos excluyentes son aquellos que no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, si se lanza una moneda al aire no puede caer águila y sol al mismo tiempo.

Ejemplos:

1. Si una moneda, que tiene dos lados, se lanza 10 veces, el número de resultados posibles es:

$$k^n = 2^{10} = 1\ 024$$

2. Si se tira en dos ocasiones un dado, que tiene seis caras, el número de los diferentes resultados es:

$$k^n = 6^2 = 36$$

3. Se pueden realizar otros ejercicios, contestar seis preguntas con tres posibles respuestas, tirar un dado tres veces, tirar una moneda seis veces.

Regla de conteo 2: Esta regla es una expresión más general de la primera. Si existen *k*-\ eventos en la primera prueba, k_2 eventos en la segunda prueba, ..., y k_n eventos en la prueba *n,* entonces el número de resultados posibles se define como el producto de las diferentes opciones:

$$(k_1)(k_2)\ldots(k_n)$$

Ejemplos:

4. En un restaurante se ofrece el siguiente menú:

Primer tiempo:	sopa o consomé
Segundo tiempo:	jamón, pollo o pescado
Tercer tiempo, postre:	pastel, flan o fruta

Si la comida consta de tres alimentos, elegidos uno de cada una de las tres clases, ¿de cuántas formas diferentes una persona puede ordenar sus alimentos?

Respuesta: para el primer tiempo tiene dos opciones, para el segundo tiene tres y para el tercero tres, por lo tanto, las diferentes formas de pedir su comida son:

$$(2)\ (3)\ (3)\text{-}18$$

5. Al Departamento de Vehículos de Motor del Estado de México le agradaría conocer cuántas matriculas tendría disponibles si éstas estuvieran formadas por tres dígitos seguidos por dos letras. El que tres valores son dígitos, cada uno de ellos con diez posibles resultados, mientras que dos de las posiciones son letras, cada una de ellas con 26 o 28 resultados.

   Por lo tanto, si una matrícula está formada por tres dígitos seguidos por dos letras, el número total de posibles resultados es:

$$(k_,)\ (k_2)...(k_n) = (10)\ (10)\ (10)\ (26)\ (26) = 676\ 000$$

   Con este criterio se podrían proporcionar placas diferentes para un total de 676 000 vehículos del Estado de México.

6. Si en el menú de un restaurante se pueden seleccionar cuatro aperitivos, diez platos principales, tres bebidas y seis postres. ¿Cuál sería el total de cenas que se podrían formar?

   El total de cenas posibles es:

$$(4)\ (10)\ (3)\ (6) = 720$$

Regla de conteo 3: Esta regla expresa el cálculo del número de diferentes formas en que se puede ordenar un grupo de objetos:

El número de formas en que se pueden ordenar todos los n objetos es:

$$n! = n\,(n-1)(n-2),\ \ldots,$$

donde n!, se lee, *n* factorial y 0!, se define como 1.[39]

Ejemplos:

7. Si se va a colocar en un estante un conjunto de seis libros de texto, ¿cómo se puede determinar el número de formas diferentes en que se pueden colocar los seis libros?

   Se puede comenzar pensando que cualquiera de los seis libros puede ocupar la primera posición en el estante. Una vez que se ocupa la primera posición, hay cinco libros entre los que se debe escoger el que ocupará la segunda posición. Este procedimiento de asignación se continúa hasta que se ocupen las seis posiciones.

   Aplicando la fórmula encontramos que el número de formas diferentes en que se pueden colocar estos seis libros es:

$$n! = 6! = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 720$$

8. Suponga que hay cuatro equipos de fútbol en un campeonato. ¿En cuántas formas pueden quedar las posiciones al final del torneo?

   Imagínese que se tienen que ocupar cuatro casillas: ganador, segundo, tercero y último lugar. La casilla del ganador la puede ocupar cualquiera de los cuatro equipos. Esto haría que quedaran tres casillas por ocupar, y tres de los equipos por seleccionar. De este modo, el segundo lugar sería uno de los tres equipos. El tercer lugar

[39] Una explicación intuitiva es la siguiente: Si hubiera una cantidad de sillas vacías ¿Cuántas ordenaciones diferentes serían posibles si ninguna persona llegara? Por supuesto que sólo existiría una forma.

sería uno de los dos equipos restantes y finalmente uno de ellos quedaría en último sitio.

Aplicando la fórmula, el número total de resultados es:

$$n!=4! = (4)(3)(2)t1) = 24$$

Si se seleccionan los equipos del primero al último, en orden inverso del último al primero, o en cualquier otro orden, el resultado final es el mismo.

En muchos casos se necesita conocer el número de formas en las que se puede colocar en orden un subconjunto de todo el grupo de objetos. Cada posible arreglo se conoce como permutación, y esto da origen a la siguiente regla:

Regla de conteo 4: Permutaciones de n elementos tomados de x en x: El número de formas de ordenar *x* objetos seleccionados de *n* objetos, se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$${}_nP_x = P_x^n = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Ejemplos:

9. Podemos utilizar el ejemplo de los libros. Si hay seis libros de texto, pero sólo hay lugar para cuatro libros en la repisa, ¿de cuántas formas se pueden colocar estos libros en el estante?

Obtenemos la respuesta aplicando la fórmula, y encontramos que el número de arreglos ordenados de cuatro libros seleccionados de entre seis libros es igual a:

$${}_nP_x = P_x^n = \frac{n!}{(n-x)!} = P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{(6)(5)(4)(3)2!}{2!} = 360$$

10. En un grupo de siete personas, ¿cuántas ordenaciones de tres de las siete personas son posibles?

El número de formas en las que se pueden ordenar tres objetos de un grupo de siete es:

$$P_x^n = \frac{n!}{(n-x)!} = P_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{(7)(6)(5)4!}{4!} = 210$$

Muchas veces no se toma interés por el orden de los resultados sino sólo de cuántas formas se pueden seleccionar x objetos de *n* objetos sin tomar en cuenta el orden. A esta regla se le conoce como *regla de las combinaciones* que veremos a continuación.

Regla de conteo 5: Combinaciones: el número de formas de seleccionar x objetos de *n* objetos, sin tomar en cuenta el orden, se calcula utilizando la fórmula:

$$_nC_x = C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Ejemplos:

11. Si retomamos el ejemplo de los libros, el número de combinaciones de los cuatro libros seleccionados de entre seis libros es:

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} = C_4^6 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{(6)(5)4!}{4!\ 2!} = \frac{30}{2} = 15$$

12. ¿Cuántos comités diferentes de tres miembros se pueden seleccionar a partir de un grupo de 10 personas?

Obtenemos la respuesta aplicando la fórmula de combinaciones:

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} = C_3^{10} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!\ 7!} = \frac{(10)(9)(8)7!}{3!\ 7!} = 120$$

Finalmente diremos que para aplicar la regla de las combinaciones deben darse las condiciones siguientes:

a. Debe haber un total de *n* cosas distintas disponibles.
b. Debemos seleccionar x de las *n* cosas (sin repetición).
c. Debemos considerar qué reacomodos de las mismas cosas son considerados como el mismo agrupamiento (es decir, iguales).

Como resulta muy común que al estudiante no le quede clara la diferencia que existe entre las permutaciones y las combinaciones, se agregará el siguiente apartado.

Comparación entre permutaciones y combinaciones: Cuando el orden es importante, el número posible de resultados se determina mediante permutaciones. Cuando el orden carece de importancia las combinaciones producen el número total de resultados posibles. Además, el número posible de combinaciones siempre es menor que el de permutaciones.

Por ejemplo, suponga que a una persona se le exhiben cuatro colores de un muestrario de pinturas, y se le pide que seleccione tres de ellos. El número de conjuntos de tres que se podrían seleccionar constituiría el número de combinaciones, dado que el orden no importa. Por otra parte, si se solicita que escoja tres colores y los jerarquice según el que le parezca mejor, en este caso el orden sí sería importante (es decir, se pueden ordenar de distintas maneras, primero el azul, el rojo, etc.) y los conjuntos de colores jerarquizados equivaldrían a las permutaciones.

En el siguiente ejemplo se puede apreciar la diferencia:

Seleccionar tres colores de cuatro existentes:

Rojo = R Azul =
A Verde = V
Anaranjado = N

Permutaciones	Combinaciones
$P_x^n = \frac{n!}{(n-x)!}$	$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$
$P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$	$C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$
RAV, RVA, AVR, ARV, VAR, VRA	RAV
RAN, RNA, ANR, ARN, NAR, NRA	RAN
RVN, RNV, VNR, VRN, NVR, NRV	RVN
AVN, ANV, VNA, VAN, NVA, NAV	AVN

Analicemos: los resultados obtenidos con las permutaciones son 24, mientras que, si no importa el orden, sólo se forman cuatro combinaciones.

RAV, RVA, AVR, ARV, VAR, VRA $\Rightarrow$ RAV

RAN, RNA, ANR, ARN, NAR, NRA $\Rightarrow$ RAN

RVN, RNV, VNR, VRN, NVR, NRV $\Rightarrow$ RVN

AVN, ANV, VNA, VAN, NVA, NAV $\Rightarrow$ AVN

Ejercicio (3.3.1):

1. Evalúe las siguientes expresiones:
   a) 6!; b) (10-4)!; c) 11!; d) 100! / 97!; e) 85! / 82!; f) (90-87)!; g) 6C4 h) 6P4; i)12P9;

2. Una persona tiene un sistema de seguridad doméstico ADT, con un código consistente en cuatro dígitos que se deben introducir en la secuencia correcta. Los dígitos pueden repetirse en el código.

   a. ¿Cuántos códigos distintos se pueden formar?
   b. Si un ladrón tarda cinco segundos en probar cada código ¿Cuánto le tomará intentar todas las posibilidades?

3. En otros tiempos, la lotería de la ciudad Monterrey, y algunas otras loterías, requerían la selección de seis números entre 1 y 40.

   a. ¿Cuántas selecciones distintas puede haber?
   b. Si usted selecciona seis números ¿Qué probabilidad tiene de ganar por haber escogido los mismos números que se sacan en la lotería?
   c. Calcule las posibilidades en contra de ganar semejante lote ría.

3.4 Axiomas de probabilidad

Los axiomas de la formulación moderna de la teoría de la probabilidad constituyen una base para deducir un amplio número de resultados.

Recordemos que la letra *P* se utiliza para designar la probabilidad de un evento, siendo *P(A),* la probabilidad de ocurrencia de un evento A en un experimento.

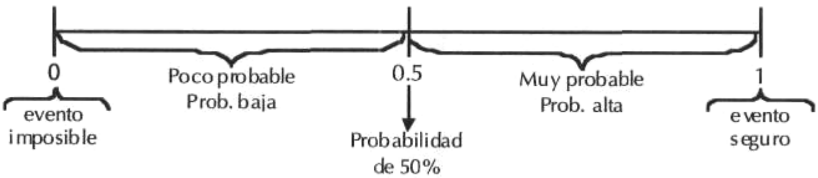
Axioma 1. La probabilidad de un evento es un número real no negativo, o sea *P(A)* 0, para cualquier subconjunto *A* de un espacio muestral 5.

Axioma 2. La probabilidad de un suceso que ocurrirá con certeza es 1, es decir *P (A)* - 1, y en complemento a este axioma podemos decir que la probabilidad de un suceso imposible de ocurrir es cero, es decir *P (A)* - 0.

En resumen podemos decir que la probabilidad de cualquier evento o suceso siempre se encuentra entre cero y uno:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Esquemáticamente podemos ver los posibles casos de probabilidad que se pueden presentar:



Axioma 3. Si *A* es un evento cualquiera de un experimento aleatorio y $\overline{A}$, es el complemento, entonces la probabilidad del complementó se puede definir como:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Es decir, la probabilidad de que el evento *A* no ocurra es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra.

3.5 EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTESY NO EXCLUYENTES

Eventos mutuamente excluyentes: Los eventos A y B, son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente en un mismo experimento.[40]

Cuando los eventos son mutuamente excluyentes la probabilidad de que uno u otro suceda (por definición no se puede presentar más de uno), equivale a la suma de cada una de sus probabilidades.

La fórmula que se aplica para el cálculo de estas probabilidades es:

$$P\,(A \text{ o } B) = P\,(A) + P\,(B)$$

Ejemplos:

1. La probabilidad de obtener águila o sol en la misma tirada de una moneda legal es:

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{A} \text{ o } \mathrm{S}) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(S)} = 1/2 + 1/2 = 1$$

2. La probabilidad de que al tirar un dado legal se obtenga un resultado de cinco o seis puntos es:

$$\mathrm{P}\,(5 \text{ o } 6) = \mathrm{P}\,(5) + \mathrm{P}\,(6) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$$

3. La probabilidad de sacar al primer intento una carta de corazones o una de tréboles de un mazo de 52 cartas es:

---

[40] Una explicación en términos de conjuntos sería decir que dados dos conjuntos, los eventos mutuamente excluyentes son aquellos que no presentan ningún elemento en común. Por ejemplo, si consideramos dos eventos obtenidos al lanzar un dado como A y C, definidos: A = números impares y C= números pares. En este caso cada uno de los eventos que también podemos definir como conjuntos contiene elementos distintos: $A = \{1, 3, 5\}$; $B = \{2, 4, 6\}$, en este caso estamos seguros que ninguno de los elementos de cualquiera de los conjuntos puede ocurrir al mismo tiempo en ambos conjuntos.

$$P\,(\text{corazones o tréboles}) = P\,(\text{cor.}) + P\,(\text{treb}) = 13/52 + 13/52 = 26/52 = 1/2$$

Eventos no excluyentes: Cuando dos eventos no son mutuamente excluyentes, ambos pueden suceder (también podemos pensar en dos eventos los cuales tienen alguna parte en común).

En este tipo de situaciones el cálculo de la probabilidad debe tomar en cuenta el hecho de que ya sea uno de ellos o ambos, puedan ocurrir.

Para el cálculo de probabilidades en estos casos aplicamos la siguiente fórmula:

$$P\,(A \text{ o } B \text{ o ambos}) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \text{ y } B)$$

Ejemplos:

1. Suponga que se quiere determinar la probabilidad de sacar una carta de trébol o un 10 de un mazo de 52 cartas. Como en este caso una carta puede reunir a los dos eventos, es decir, puede ser un trébol y de número 10, para este caso especial los eventos "diez" y "trébol" no son mutuamente excluyentes. Veamos esto con más detalle. Para eso debemos demostrar cómo se componen las cartas de una baraja:

Tréboles (negros)	Diamantes (rojos)	Corazones (rojos)	Espadas (negros)
K	K	K	K
Q	Q	Q	Q
J	J	J	J
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7
6	6	6	6
5	5	5	5
4	4	4	4
3	3	3	3
2	2	2	2
A	A	A	A

En este caso, simplemente sumar sus probabilidades individuales exagerará la probabilidad real, ya que el 10 de tréboles se contará dos veces, una como diez y otra como trébol (como se observa en la figura). En consecuencia, tenemos que restar la probabilidad de sobreestimar (o duplicar) si queremos evitar este problema.

Solución:

Evento A = Tréboles = {A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K}

Evento B = Cartas núm. 10 = {10 tréb., 10 diam., 10 coraz., 10 esp.}

Por lo tanto:

P (tréboles) = 13/52;   P (diez) = 4/52; P (diez de tréboles) = 1 /52

Entonces la probabilidad buscada sería:

P (trébol o 10 o ambos) = P (trébol) + P (diez) - P (diez de trébol)
P (trébol o 10 o ambos) = 13/52 + 4/52 -1/52 = 16/52 = 30.769 ~ 31 %

2. Pensemos un caso en el cual el gobierno requiere aplicar una encuesta acerca del desempeño del presidente en lo que va de su mandato, por lo general es imposible consultar a toda la población, por lo que se decide escoger a las familias que participarán en la encuesta utilizando computadoras para seleccionar aleatoriamente los últimos dígitos de números telefónicos. Si escogemos aleatoriamente uno de los números: 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, para el último dígito. ¿Cuál es la probabilidad de que el número seleccionado sea 0o 1?

La probabilidad sería: P(0 o 1) = P(0) + P(1) = 1/10 + 1/10 = 2/10 = 1/5

Es muy sencillo, ahora pensemos en una modificación al mismo experimento.

3. Consideremos otro caso, determine la probabilidad de obtener un resultado que sea impar o mayor que 6. Observe que de los diez posibles resultados, cinco son impares (1, 3, 5, 7, 9) y tres son mayores de 6 (7, 8, 9).

Solución:

Evento *A* - impares = {1,3, 5, 7, 9}
Evento *B* = mayores que 6 = {7, 8, 9}
Evento *C* = impar y mayores que 6 = {7, 9}

Conjunto final: impares o mayores que 6 = {1, 3, 5, 7, 8, 9}

Por lo tanto:

P(impar) = 5/10; P(>6) = 3/10; P (impar o > 6) = 2/10

Entonces la probabilidad buscada es:

P (impar o > 6 o ambos) = *P* (impar) + P(> 6) - P (ambos) P

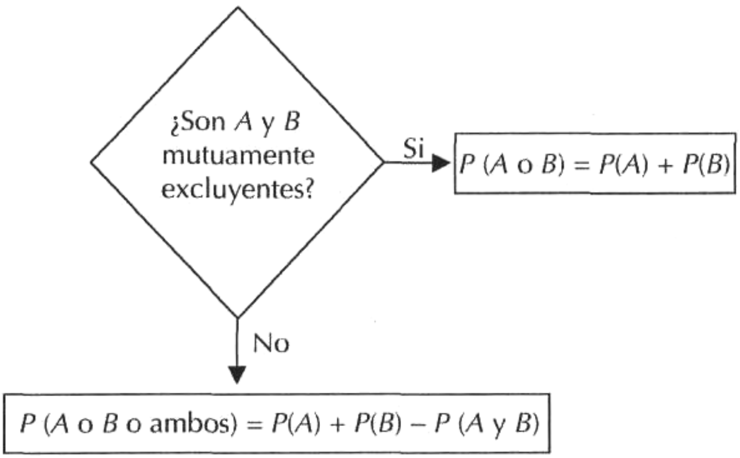
(impar o > 6 o ambos) = 5/10 + 3/10-2/10 = 6/10 = 0.6

He aquí el punto clave: al calcular la probabilidad de que ocurra el suceso *A* o que ocurra el suceso *B,* determine el número total de formas en que *A* puede ocurrir y el número de formas en que *B* puede ocurrir, finalmente puede formar un conjunto que contenga a los dos grupos pero de tal manera que ningún resultado se contabilice más de una vez. En ese caso podemos calcular la probabilidad directamente del grupo combinado.

Impares o mayores que 6 = {1, 3, 5, 7, 8, 9}

Otra manera de explicar la misma idea sería decir que una estrategia es combinar el número de formas en que *A* puede ocurrir con el número de formas en que *B* puede ocurrir y si existen elementos comunes a ambos conjuntos, restando el número de resultados que se pueden contar más de una vez.

Para finalizar anotaremos un pequeño diagrama que nos permita recordar en qué momento se aplica cada fórmula:



3.6 Eventos dependientes e independientes

Dos eventos son independientes entres sí cuando la ocurrencia de uno no está relacionada con la ocurrencia del otro. Por otra parte, si los eventos no son independientes quiere decir que son dependientes y en este caso, la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia del otro.

Eventos independientes (o con reemplazo): Cuando dos eventos son independientes, la probabilidad de que ambos ocurran es igual al producto de sus probabilidades individuales y se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$P(A \text{ y } B) = P(A)\, P(B)$$

Ejemplos:

1. Se tiran dos monedas legales al aire ¿Cuál es la probabilidad de que ambas caigan en águila?

   Solución: es razonable suponer que los resultados de tirar las monedas al aire son independientes entre sí. Además, se sabe que las monedas tienen la probabilidad de caer águila igual a 1/2. Por lo tanto:

   $$P(\text{águila y águila}) = P(\text{águila})\, P(\text{águila}) = \underbrace{(1/2)}_{\text{Tirada1}}\ \underbrace{(1/2)}_{\text{Tirada2}} = \underbrace{(1/4)}_{\text{ambas}}$$

2. Suponga que se quiere aplicar esto a tres monedas ¿qué probabilidad se tiene de que las tres monedas sean águila?

   $$P(\text{águila, águila y águila}) = P(\text{águila})\, P(\text{águila})\, P(\text{águila})$$
   $$= \underbrace{(1/2)}_{\text{Tirada1}}\ \underbrace{(1/2)}_{\text{Tirada2}}\ \underbrace{(1/2)}_{\text{Tirada3}} = \underbrace{1/8}_{\text{Las tres}}$$

3. El 10% de las personas son zurdas, ¿qué probabilidad hay de seleccionar aleatoriamente a dos personas zurdas?

   La probabilidad de que una persona sea zurda es de 0.10, pero en nada influye para que otra diferente y que no sea familiar sea también zurda, es decir, son eventos independientes, entonces la probabilidad es:

   $P(\text{zurda y zurda}) = \text{P}(\text{zurda})\, P(\text{zurda}) = (0.10)\,(0.10) = 0.01$

Eventos dependientes (o sin reemplazo): Cuando dos eventos son dependientes quiere decir que la probabilidad de que ocurra uno o el otro se ve afectada por la probabilidad del suceso que ocurra primero, la fórmula que se utiliza es la siguiente:

$$P\ (A \text{ y } B) = P\ (A)\ P\ (B/A)$$

Donde: *P (B/A),* representa la probabilidad de que el suceso *B* ocurra después de suponer que ocurrió el suceso *A* (se puede leer *P(B/A)* como la probabilidad de *B* dado que ocurrió *A).*

Ejemplos:

1. Una compañía automotriz que produce autos modelo Chevy tiene que surtir al mercado de los filtros de gasolina que usan sus vehículos; en su fábrica de refacciones se ha comprobado que de un lote de 50 filtros de gasolina, seis de ellos salen defectuosos. Los filtros salen de la fábrica en cajas con 50 piezas. En una refaccionaria que compra estos filtros se recibe una caja y se venden dos de ellos. Calcule la probabilidad de que los dos primeros salgan en buen estado si los filtros se seleccionan a) con reemplazo (independientes) y b) sin reemplazo (dependientes).

   Solución:

   a) Si los filtros se seleccionan con reemplazo, las dos selecciones son independientes porque el primer resultado no afecta al segundo, por lo tanto:

      P (1^o bueno y 2^o bueno) =P (1^o bueno) P (2^o bueno) P(1° bueno y 2^o bueno) = (44/50) (44/50) = 0.774

      Esta es la forma de calcular la probabilidad para dos eventos independientes.

b) Si los filtros se seleccionan sin reemplazo las dos selecciones son dependientes porque el primer resultado afecta al segundo, por lo tanto la probabilidad se calcularía de la siguiente forma:

P (1º bueno y 2º bueno) = P (1º bueno) P (2º bueno/1 ° bueno) P (1º bueno y 2º bueno) = (44/50) (43/49) = 0.772

Observe que, en este caso, ajustamos la segunda probabilidad para tomar en cuenta la selección de un filtro bueno en la primera selección. Después de escoger un filtro bueno la primera vez, había 43 filtros buenos entre los 49 restantes.

2. Una caja contiene tres bolas blancas y dos bolas negras. Sea *A* el suceso "la primera bola extraída es negra" y *B* el suceso "la segunda bola extraída es negra". Si las bolas extraídas no se devuelven a la caja (con reemplazo), *A* y *B* son sucesos independientes. Si las bolas extraídas no se devuelven a la caja (sin reemplazo) *A* y *B* son suce sos dependientes. Veamos el segundo caso, es decir, cuando se trata de sucesos dependientes:

   La probabilidad de que la primera bola sea negra es: P *{A)* = 2/(3+2) =2/5. La probabilidad de que la segunda sea negra, dado que lo ha sido la primera, es *P(B/A)* - 1/ (3+1) = 1/4. Luego la probabilidad de que ambas sean negras es:

$$P\ (A \text{ y } B) = P\ (A)\ P\ (B/A) = (2/5)\ (1/4) = (1/10) = 0.10$$

3. Suponga que se tienen dos urnas con canicas. La primera contiene ocho rojas y dos blancas, la segunda contiene cinco rojas y cinco blancas, si las representamos en un cuadro tenemos:

	Rojas	Blancas	Totales
Urna *Y*	8	2	10
Urna *Z*	5	5	10

Expresada la misma tabla en términos de probabilidad:

	Rojas	Blancas	Totales
Urna *Y*	8/10	2/10	10/10
Urna *Z*	5/10	5/10	10/10

De esta manera podemos definir con claridad que la probabilidad de seleccionar una canica roja de la urna Ves 8/10. Esto se representa P(roja/urna *Y),* es decir, la probabilidad de que la canica sea roja suponiendo que es de la urna *Y,* o bien, dada la urna, se selecciona la urna *Y.*

Es evidente que las demás probabilidades se expresan de la siguiente forma: P (roja/urna Z) - 5/10, P (blanca/urna *Y)* - 2/10 y *P* (blanca/urna Z) = 5/10.

Suponga ahora que las urnas no están marcadas, y que la probabilidad de elegir cualquiera de las dos es 1/2, es decir, La *F\Y)* = P(Z) = 1/2. Desde estas condiciones ¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica roja de la urna Z?

Solución:

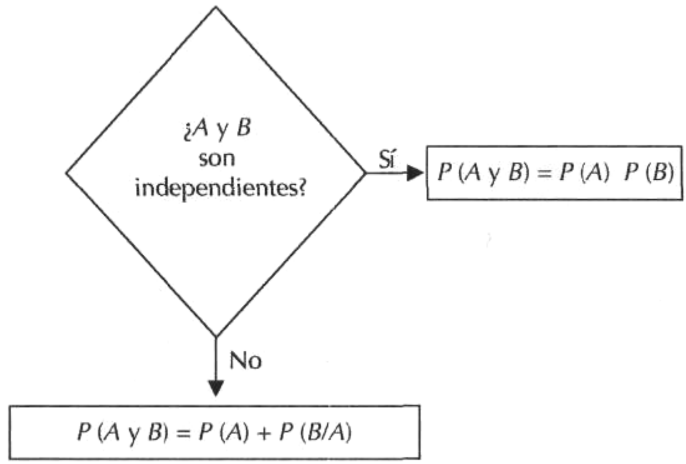
Para el cálculo de la probabilidad deseada se deben contemplar dos aspectos importantes, primero la probabilidad de seleccionar la urna Zy segundo la probabilidad de obtener una canica roja de las que tiene la urna Z, entonces considerando estos aspectos la probabilidad es:

P(urnaZ)=1/2 y P (roja/urna Z) = 5/10 P(urna Zy
roja) = P (urna Z) P (roja/urna Z) P(urna Zy roja) =
(1/2) (5/10) = (5/20) = 1/4 = 0.25

4. También podemos calcular la probabilidad de que la canica sea roja y provenga de la urna *Y:*

P(urna Vy roja) = P(urna YO *P* (roja/urna *Y)* P(urna *Y y* roja) = (1/2) (8/10) = (8/20) = 2/5 = 0.40

El siguiente diagrama nos permite recordar en qué momento se aplica cada fórmula:



Si hacemos un resumen general de las reglas de probabilidad que hemos estudiado, vemos que:

Reglas de probabilidad:[.41][41]

1. *P* (*A* o *B),* para eventos mutuamente excluyentes: *P* (ya sea queAoB ocurran) = *P(A)* + *P (B)*

---

[41] Es importante mencionar que cuando hablamos de eventos excluyentes o no excluyentes calculamos la probabilidad de que ocurra uno o el otro y utilizamos la notación *P(A* o S). En el caso de eventos independientes y dependientes, la probabilidad que se calcula es la de que ocurran los dos eventos al mismo tiempo y en el caso de dependientes lo que se calcula es la probabilidad de que ocurra un evento cuando se supone que ya ocurrió otro previamente y utilizamos la notación *P(A* y 8).

2. Eventos que no sean mutuamente excluyentes:
   P (A o *B o* ambos ocurran) = *P {A)* + *P* (B) - *P {A* y *B)*

3. Para eventos independientes:
   P(Ay B) = P(A) P (B)

4. Para eventos dependientes:
   P (A y *B) = P (A) P (B/A)*

3.7 Teoremas más importantes de la probabilidad

3.7.1 Regla de la adición

La regla de la suma se utiliza en el cálculo de probabilidades de eventos excluyentes y no excluyentes. Esta regla expresa que para poder obtener *P (A o B),* se calcula la suma del número de formas en que puede ocurrir el suceso *A* y el número de formas en que puede ocurrir el suceso *B,* sumando de tal modo que cada resultado se contabilice sólo una vez. *P(A* o 6), es igual a la suma dividida entre el número total de resultados. Recordemos el caso visto con anterioridad: la probabilidad de que al tirar un dado se obtenga un resultado de cinco o seis puntos es:

$$P(5 \text{ o } 6) = P(5) + P(6) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$$

3.7.2 Regla de la multiplicación

La regla de la multiplicación se utiliza en el cálculo de probabilidades de eventos independientes y dependientes.

Esta regla expresa que para poder determinar *P(A* y 6), se calcula la probabilidad de que el suceso *A* ocurra en un primer ensayo y el suceso *B* ocurra en un segundo ensayo.

En realidad ya hemos visto la aplicación de esta regla en secciones anteriores al igual que la regla de la suma, pero veremos algunos ejemplos que servirán para que el estudiante reafirme el conocimiento.

Ejemplo: suponga que la primera pregunta de un examen es de tipo falso/verdadero y que la segunda es de opción múltiple con cinco posibles respuestas (a, b, c, d e). Usaremos las dos preguntas siguientes:

1. Falso o verdadero: el hábito de fumar es una de las principales cau sas del cáncer.
2. El coeficiente de correlación de Pearson se llama así por:

   a. Karl Marx
   b. Cari Friedrich Gauss
   c. Kart Pearson
   d. Carly Simón
   e. Mario Trióla

Cuando se califican pruebas estandarizadas, generalmente se compensa por la probabilidad de que el examinado adivine, así que vamos a calcular la probabilidad de que si alguien adivina las respuestas de ambas preguntas, la primera respuesta sea correcta y la segunda respuesta sea correcta. Una forma de encontrar dicha probabilidad es listar el espacio muestral de la siguiente forma:

V, a	*V, b*	*V, c*	*V, d*	*V, e*
F, a	*F, b*	*F, c*	*F, d*	*F, e*

Si las respuestas son conjeturas al azar, los 10 posibles resultados son igualmente probables. Las respuestas correctas son Vy c, así que:

$$P\,(\text{ambas correctas}) = P\,(V \text{ y } c) = 1/10 = 0.1$$

Si consideramos las respuestas individuales de *V y c,* respectivamente, vemos que adivinando al azar tenemos:

$$P(V) = 1/2 \text{ y } P(c) = 1/5$$

Si recordamos que 1/10 es el producto de (1/2) (1/5), vemos que *P(Vy c) = P(V) P*(c). Esto sugiere que en general que *P (A* y *B) = P {A) P(B).*

Otro tipo de casos en donde se aplica la regla de la multiplicación sería como el siguiente:

Para la extracción de dos naipes de un mazo de 52 cartas, encuentre la probabilidad de que la primera carta sea un as y la segunda un rey, es decir, determine P (as y rey). Suponga que la primera carta no se devuelve al mazo, antes de sacar la segunda, es decir, se trata de una prueba sin reemplazo.

Respuesta: si observamos que hay cuatro ases entre las 52 cartas distintas, obtendremos P (as) - 4/52. Para la segunda selección suponemos que se obtuvo un as en la primera extracción, así que ahora tenemos cuatro reyes entre las 51 cartas restantes y por lo tanto la *P* (rey) = 4/51. La probabilidad de obtener un as en la primera extracción y un rey en la segunda es:

$$P\,(\text{as y rey}) = (4/52)\,(4/51) = 0.00603$$

Este caso ilustra el importante principio de que la probabilidad del suceso *B* debe tener en cuenta el hecho de que el suceso *A* ya ocurrió. Este principio suele expresarse con la notación siguiente:

P *(B/A)* representa la probabilidad de que B ocurra después de suponer que ya pasó el suceso *A.*

Finalmente, con este ejemplo se contemplan los dos casos en donde se puede aplicar la regla de la multiplicación para eventos independientes o dependientes.

3.8 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Cada uno de los casos que se han examinado hasta ahora, ha incluido la probabilidad de un evento particular cuando se enseña todo el espacio muestral. Ahora bien, ¿cómo se encontrarían diversas probabilidades si ya se conociera cierta información relacionada con los eventos en cuestión?

Cuando se calcula la probabilidad de un evento *(A)* particular y al tener información en cuanto a la ocurrencia de otro evento *(B),* esta probabilidad se denomina probabilidad condicional *{A/B).*

Veamos con más detalle de dónde se deduce esta relación. Si recordamos que la regla de la multiplicación para sucesos dependientes se puede expresar formalmente como:

$$P\,(A \text{ y } B) = P\,(A)\,P\,(B/A)$$

Despejando *P(B/A),* de esta ecuación el resultado se llama probabilidad condicional de que ocurra el suceso *B,* dado que ya ocurrió el suceso *A.*

$$P\,(B/A) = \frac{P\,(A \text{ y } B)}{P\,(A)}$$

Esta fórmula se utiliza para calcular la probabilidad condicional.

Definición: La probabilidad condicional de *B,* dado *A,* es la probabilidad de que el suceso *B* ocurra, dado que el suceso *A,* ya ocurrió.

Ejemplos:

1. Se desea encontrar *P* (as/negra). En este caso se informa que la carta es negra. Por tanto, el espacio muestral no consta de las 52 cartas de la baraja, sólo consta de las cartas negras. De las 26 cartas negras dos son ases. Por lo tanto, dado que se sabe que la carta es negra, la probabilidad de un as es:

$$P(as/\text{negra}) = \frac{\text{Núm. de ases negros}}{\text{Núm. de cartas negras}} = \frac{2}{26} = 0.077$$

Este resultado (2/26) también se puede obtener utilizando la ecuación formal:

$$P(as/\text{negra}) = \frac{P(as \text{ y negra})}{P(\text{negra})} = \frac{2/52}{26/52} = \frac{2}{26} = 0.077$$

2. Si consideramos la siguiente tabla, y suponemos que todas las selecciones se hacen entre los 2 000 sujetos representados en la tabla:

Relación entre delincuente y víctima

	Homicidio	Robo	Agresión	Totales
Extraño	12	379	727	1118
Conocido o pariente	39	106	642	787
No se sabe	18	20	57	95
	69	505	1426	2000

Calcule lo siguiente:

a. Si se escoge aleatoriamente una persona ¿qué probabilidad hay de que haya sido víctima de un extraño, dado que se escogió a una víctima de robo?

b. Dado que se seleccionó a una víctima de agresión ¿qué probabilidad hay de que el delincuente sea un extraño?

Solución:

a. Queremos calcular P (extraño/robo). Si suponemos que la persona seleccionada fue víctima de un robo estamos tratando con las 505 personas de la segunda columna de valores. De estas 505 personas, 379 fueron víctimas de un delincuente extraño así que:

Aplicando el razonamiento formal podemos obtener el mismo resultado:

$$P(\text{extraño/robo}) = \frac{P(\text{robo y extraño})}{P(\text{robo})} = \frac{379/2000}{505/2000} = 0.750$$

$$P\,(\text{extraño/robo}) = 379/505 = 0.750$$

b. En este caso queremos calcular *P* (extraño/agresión). Si suponemos que la persona seleccionada fue víctima de una agresión, estamos tratando con las 1426 personas de la tercera columna. De esas 1426 personas, 727 fueron víctimas de un extraño, así que:

$$P(\text{extraño/agresión}) = \frac{727}{1426} = 0.510$$

Una vez más se puede obtener el mismo resultado con el enfoque formal.

$$P(\text{extraño/agresión}) = \frac{P(\text{agresión y extraño})}{P(\text{agresión})} =$$

$$\frac{727/2000}{1426/2000} = 0.510$$

Si comparamos los resultados de las partes (a) y (b) veremos que la probabilidad de ser víctima de un extraño es muy diferente para los robos que para las agresiones, de modo que hay una dependencia entre el tipo de delito y la relación entre delincuente y víctima. 3. Se quiere encontrar la probabilidad de que un estudiante seleccionado en forma aleatoria sea estudiante de contabilidad y que cuente con un promedio de *B* o mayor. La información con la que se cuenta es la siguiente:

	Contabilidad	Otras materias	Totales
Promedio menor que *B*	20	37	57
Promedio de *B* o mayor	15	22	37
Totales	35	59	94

Como la información dada en la condición es que el estudiante tenga un promedio de *B* o mayor, el espacio muestral se reduce a aquellos estudiantes que tienen promedios de *B* o mayor (37 estudiantes), de estos 37, se puede ver que 15 lo son de contabilidad. Por tanto, la probabilidad de que el estudiante sea de contabilidad, dado que tiene un promedio de *B o* mayor, se puede calcular como sigue:

$$P(contabilidad/B \text{ o mayor}) =$$
$$\frac{\text{Núm. de est. de cont. con prom. } B \text{ o mayor}}{\text{Núm. de promedios de } B \text{ o mayores}} =$$
$$\frac{15}{37} = 0.41$$

Aplicando la regla formal tenemos:

$$P(contabilidad/B \text{ o mayor}) = \frac{P(contabilidad \text{ y } B \text{ o mayor})}{P(B \text{ o mayor})} =$$
$$\frac{15/94}{37/94} = \frac{15}{37} = 0.41$$

3.9 Teorema de Bayes

La probabilidad condicional toma en cuenta información acerca de la ocurrencia de un evento para encontrar la probabilidad de otro. Este concepto puede extenderse para revisar probabilidades basadas en nueva información y para determinar la probabilidad de que un efecto en particular se deba a una causa específica. El procedimiento para revisar estas probabilidades se conoce como *Teorema de Bayes.*

El Teorema de Bayes es una técnica que se utiliza para verificar las estimaciones iniciales de la probabilidad con base en los datos de la muestra. En otras palabras, también podemos decir que es un método para verificar las probabilidades (anteriores), existentes, con base en la información obtenida por el muestreo.

Iniciemos la explicación de este teorema con un ejemplo antes de anotar la fórmula que se utiliza para calcular las probabilidades de este tipo.

Considere el caso de un individuo que apresuradamente besa a su esposa una mañana lluviosa, toma una de las bolsas que están sobre la mesa de la cocina y se dirige de prisa hacia su trabajo. Poco después, y ya en camino, se le ocurre pensar que pudo haber tomado una bolsa equivocada. Una de ellas contenía su almuerzo: dos emparedados de jamón. Otra, en cambio, contenía el almuerzo de su hija: un emparedado de jamón y uno de crema de cacahuate (la cual él detesta). La tercera bolsa contenía basura.

En este ejemplo, la probabilidad de obtener un emparedado de jamón equivale a la probabilidad de elegir la primera bolsa y obtener un emparedado de jamón, más la probabilidad de elegir la segunda bolsa y encontrar uno de jamón más la probabilidad de escoger la tercera bolsa y obtener un emparedado de jamón.

Veamos esto más detalladamente; si colocamos la información en forma tabular, las cifras son más fáciles de visualizar:

Contenido de las bolsas (emparedados)

	Jamón	Crema de cacahuate	Basura
Su bolsa	2	0	0
Bolsa de la hija	1	1	0
Bolsa de basura	0	0	1

Si cambiamos estas cifras a porcentajes, y recordamos que la probabilidad conocida o anterior (antes de tomar la muestra), de elegir cada bolsa era de 1/3, se elabora la siguiente tabla:

Probabilidad *a priori*		Contenido: Jamón	Crema	Basura	Totales
1/3	Su bolsa	1.00	0.00	0.00	1.00
1/3	Bolsa de la hija	0.50	0.50	0.00	1.00
1/3	Bolsa de basura	0.00	0.00	1.00	1.00

Forma específica

Evidencias de la muestra

Considerando esta nueva tabla, la probabilidad de elegir ¡nicialmente cualquiera de las bolsas es de 1/3. Estas son las probabilidades *a priori* que se revisarán utilizando la información muestral de que un emparedado de jamón se saque de la bolsa. Los valores dentro de la tabla son las probabilidades de encontrar un emparedado de jamón suponiendo que se tomó inicialmente la bolsa específica. Por ejemplo, habría una probabilidad de cero de encontrar un emparedado de jamón si se hubiera tomado la bolsa de basura, 50% de probabilidad de tener el emparedado de jamón si se eligiera el almuerzo de la hija y 100% de probabilidad de sacar el emparedado de jamón si el individuo mencionado hubiera elegido su propia bolsa.

Formalmente calcularemos la probabilidad de que el hombre seleccione la bolsa correcta, suponiendo que él encuentra un emparedado de jamón al buscar en la bolsa, pero eso no quiere decir que la bolsa sea la correcta, por lo tanto la probabilidad de que el emparedado de jamón

$$P\ (\text{almuerzo correcto/emparedado de jamón}) =$$

$$\frac{P(\text{emparerado de jamón de la bolsa correcta})}{P(\textit{todas}\ \text{las formas de obtener un emparedado de jamón})}$$

$$P\ (\textit{bolsa correcta dado el jamón}) =$$

$$\frac{1/3\ (1.00)}{1/3\ (1.00) + 1/3\ (0.50) + 1/3\ (0.00)} = \frac{2}{3}$$

sea el de su bolsa está dada por:

Podemos concluir que, cuando se aplica la regla de Bayes, el razonamiento es el siguiente: *si un evento puede ocurrir en más de una forma, entonces la probabilidad de que suceda una en particular sería igual a la razón de la probabilidad de que se presente la forma particular respecto a la suma de las probabilidad de las diferentes formas en que puede ocurrir.*

Veamos otro ejemplo para que, con base en lo expuesto hasta ahora, se pueda comprender el Teorema de Bayes.

Suponga que tenemos cuatro urnas con 10 canicas de colores en cada una de ellas. En la siguiente tabla se resume el contenido de las urnas:

Color de las canicas

Urna	Roja	Blanca	Azul	Totales
A	1	6	3	10
B	6	2	2	10
C	8	1	1	10
D	0	6	4	10

Si se elige una de las cuatro urnas en forma arbitraria, y de ellas se saca una sola canica, y si la canica es roja ¿Cuál es la probabilidad de que se haya sacado de la urna B?

Respuesta:

Para resolver este problema (o cualquier problema semejante) necesitamos dos cosas:

1. La probabilidad anterior (a *priori),* a seleccionar cada urna.
2. La probabilidad de que ocurra el evento en cuestión (la canica roja en este caso).

Las probabilidades *a priori* (anteriores), serían 1/4 para cada urna, ya que hay cuatro, y se puede suponer que cada una presenta la misma probabilidad de ser seleccionada.

La probabilidad de sacar una canica roja de una urna determinada es la razón de canicas rojas con respecto al total de canicas en dicho recipiente. La siguiente tabla muestra estas probabilidades (que se calculan utilizando la información de la tabla anterior).

	Probabilidad anterior	Urna	Color: Rojo	Blanco	Azul	Totales
	1/4	A	0.10	0.60	0.30	1.00
Forma específica	1/4	B	0.60	0.20	0.20	1.00
	1/4	C	0.80	0.10	0.10	1.00
	1/4	D	0.00	0.60	0.40	1.00

Evidencias de la muestra

Recordemos que si un evento puede ocurrir en más de una forma, entonces la probabilidad de que suceda una en particular sería igual a la razón de la probabilidad de que se presente la forma particular respecto a la suma de la probabilidad de las diferentes formas en que puede ocurrir. En este caso la probabilidad de que la canica roja sea de la urna B se determina de la siguiente forma:

$$P \text{ (urna B/roja)} =$$

$$\frac{1/4\ (0.60)}{1/4\ (0.10) + 1/4\ (0.60) + 1/4\ (0.80) + 1/4\ (0.00)} =$$

$$0.400 \cong \frac{6}{15}$$

De hecho, la probabilidad de que la canica roja se extraiga de cualquier otra urna, se puede calcular de la misma manera:

$$P \text{ (urna A/roja)} =$$

$$\frac{1/4\ (0.10)}{1/4\ (0.10) + 1/4\ (0.60) + 1/4\ (0.80) + 1/4\ (0.00)} =$$

$$0.067 \cong \frac{1}{15}$$

$$P \text{ (urna C/roja)} =$$

$$\frac{1/4\ (0.80)}{1/4\ (0.10) + 1/4\ (0.60) + 1/4\ (0.80) + 1/4\ (0.00)} =$$

$$0.533 \cong \frac{8}{15}$$

$$P\ (\text{urna D/roja}) =$$

$$\frac{1/4\ (0.00)}{1/4\ (0.10)\ +\ 1/4\ (0.60)\ +\ 1/4\ (0.80)+1/4\ (0.00)} =$$

$$0.00 \cong \frac{0}{15}$$

Se deben observar dos cosas:

1. La suma de las probabilidades de las diferentes urnas (formas en que puede "ocurrir" que salga la canica roja) es 1.00.
2. El denominador es el mismo para los cuatro cálculos.

Veamos un último ejemplo: un estudio reciente indicó que 70% de todos los estudiantes de economía tienden a utilizar la "fantasía" como un mecanismo para superar la frustración causada por la resolución de problemas estadísticos, y que 30% no los hacen por esa razón.

Un profesor de estadística elaboró una prueba para medir si un alumno fantaseaba o no. Generalmente el examen produce un resultado positivo para 60% de los estudiantes que utilizan fantasías, y un resultado negativo para 40% restante. En el caso de los no fantasiosos el examen resulta positivo para 20% y negativo para 80%. Esta información se puede resumir en forma tabular:

Probabilidad		Resultados de las pruebas	
a priori		Positivos	Negativos
0.70	Fantasiosos	0.60	0.40
0.30	No fantasiosos	0.20	0.80

Utilizando el Teorema de Bayes es posible determinar la probabilidad (a *posteriori)* de que una persona utiliza fantasías obteniendo un resultado positivo:

$$P\,(fantasiosos/positivos) = \frac{0.70\ (0.60)}{0.70\ (0.60) + 0.30\ (0.20)} =$$

$$\frac{0.42}{0.42+0.06} = 0.888$$

La esencia del Teorema de Bayes es la revisión de las estimaciones iniciales de la probabilidad (a *priori),* dada la evidencia de la muestra. Las estimaciones revisadas reciben el nombre de probabilidades *a posteriori.* Las bases para la verificación son los resultados de una muestra particular más el conocimiento de las probabilidades condicionales.

Una vez que hemos visto los diferentes ejercicios podremos plantear una expresión general para el Teorema de Bayes.

De existir un número de "estados de la naturaleza" o situaciones previas, como bolsa sobre la mesa, urnas con canicas, o tener o no tener fantasías, cada uno con uno o más resultados o eventos de muestreo posibles, asociados con ellos, así como el emparedado de jamón, la canica roja, etc., la representación tabular de éstos sería:

$$\begin{array}{ccccc}
 & E_1 & E_2 & \dots & E_j \\
S_1 & P(E_1 / S_1) & P(E_2 / S_1) & \dots & P(E_j / S_1) \\
S_2 & P(E_1 / S_2) & P(E_2 / S_2) & \dots & P(E_j / S_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
S_i & P(E_1 / S_i) & P(E_2 / S_i) & \dots & P(E_j / S_i)
\end{array}$$

Por ejemplo: la probabilidad de que un resultado muestral, digamos E_2 ocurra como consecuencia de un estado particular de la naturaleza, digamos, S^ se puede calcular de esta manera:

$$P\ (S_1\ /\ E_2) =$$

$$\frac{P(S_1)\ P(E_2\ /S_1)}{P(S_1)\ P(E_2\ /S_1)+P(S_2)\ P(E_2\ /S_2)+\ldots+P(S_i)\ P(E_2\ /S_i)}$$

El caso general se puede entender como la fórmula del Teorema de Bayes:

$$P\ (S_i\ /\ E_j) =$$

$$\frac{P(S_i)\ P(E_j\ /S_i)}{P(S_1)\ P(E_1\ /S_1)+P(S_2)\ P(E_2\ /S_2)+\ldots+P(S_i)\ P(E_j\ /S_i)}$$

Al estudiante le puede resultar un poco rebuscada pero releyendo los ejercicios puede encontrar una fácil comprensión de su aplicación.

4. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES DISCRETAS

Algo he aprendido en mi larga vida: que toda nuestra ciencia, contrastada con la realidad, es primitiva y pueril; y, sin embargo, es lo más valioso que tenemos.

ALBERT EINSTEIN

Objetivos:

Al finalizar el capítulo el alumno será capaz de:

- Comprender el concepto de distribución de frecuencia y distri bución de frecuencia acumulada, y su aplicación a problemas.
- Comprender los conceptos y propiedades de los operadores de esperanza matemática y, varianza.
- Comprender los conceptos y propiedades de la distribución binomial y binomial generalizada, así como su aplicación en la solución de problemas.
- Comprender el concepto y propiedades de la distribución hipergeométrica, así como su aplicación en la solución de pro blemas.
- Comprender el concepto y propiedades de la distribución de Poisson, así como su aplicación en la solución de problemas.

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior estudiamos los principios básicos de la Teoría de la Probabilidad. En esta unidad de lo que se trata es de combinar esos conceptos para poder analizar una distribución o varias, expresadas en términos de probabilidad, es decir, en donde los datos sean analizados en términos de las diferentes probabilidades que se asumen con la finalidad de obtener distribuciones de probabilidad que describan lo que probablemente sucederá en lugar de lo que sucedió realmente.

En este capítulo aprenderemos a calcular la media, también conocida como esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar para las distribuciones de probabilidad, así como las tres familias de distribuciones de probabilidad discretas que se presentan con mayor frecuencia: binomial, hipergeométrica y de Poisson.

4.1 CONCEPTOS BÁSICOS

En esta sección definiremos algunos conceptos que resultan básicos para el estudio de esta unidad, el primero de ellos es:

Variable aleatoria: es una variable cuyo valor se encuentra determinado por el azar para cada resultado de un experimento. En algunos experimentos el resultado es cuantitativo como dólares, pesos o número de hijos y el resultado de otros es cualitativo como color o preferencia religiosa. También podemos decir que una variable aleatoria es aquella de la cual no podemos conocer su valor hasta que sucede, se representa siempre utilizando alguna letra, por lo general *X.*

Algunos ejemplos de variables que podemos considerar aleatorias son los siguientes:

1. *X* = Número de accidentes de Aeroméxico de entre siete vuelos seleccionados al azar.
2. *X* = Número de mujeres entre diez empleados recién contratados.
3. *X*= Número de alumnos que faltarán mañana a la clase de estadís tica.

Usamos el término de variable aleatoria para describir el valor que corresponde al resultado de un experimento, se utiliza la palabra "aleatoria" para acordarnos que, por lo regular, no conocemos ese valor antes de llevar a cabo el experimento.

Es importante mencionar que las variables aleatorias se dividen en dos grupos, discretas y continuas. Para los fines de esta unidad solamente trabajaremos con variables del tipo discretas; en la siguiente unidad trabajaremos con el tipo de variables continuas.

Variables aleatorias	Discretas:	Una variable que sólo puede tomar valores enteros de algún experimento de interés, o claramente separados y definidos sus valores numéricos.
	Continuas:	Tienen un número infinito de valores y éstos pueden asociarse a mediciones en escala continua de tal manera que no hay huecos ni interrupciones.

Un ejemplo de algunas variables de este tipo serían: el cómputo del número de personas que entran a ver una película es un número entero y, por tanto, es una variable aleatoria discreta.

El caso de medir el tiempo registrado por un gran número de corredores en los últimos 40 años, digamos para la prueba de los 100 metros planos, se puede considerar como una variable continua ya que puede tomar valores tan cercanos entre sí que si los observáramos gráficamente lo que veríamos serían puntos tan cercanos uno de otro que formarían una especie de línea o curva continua.

Como ya lo mencionamos, en lo que se refiere a esta unidad, solamente vamos a analizar casos alusivos a variables discretas y con este tipo de situaciones también examinaremos las posibles distribuciones de probabilidad que se pueden aplicar para el estudio de los diversos fenómenos que sean producto de variables discretas.

Además de identificar los valores de una variable aleatoria discreta, a menudo podemos reconocer una probabilidad para cada uno de sus valores.

Si conocemos todos los valores que puede tomar una variable aleatoria, junto con sus correspondientes probabilidades, tenemos una distribución de probabilidad que se define así:

Distribución de probabilidad: una distribución de probabilidad indica todos los resultados probables de un experimento, así como la probabilidad de ocurrencias de estos resultados, también podemos decir que es una lista de todos los resultados de un experimento y la probabilidad que se asocia con cada uno de ellos.

Es aquella que nos muestra la forma en que se encuentran distribuidas las diversas probabilidades de cada valor que asume la variable aleatoria.

Ejemplo: si retomamos la variable aleatoria que definimos anteriormente como: X ±= número de accidentes de Aeroméxico de entre siete vuelos seleccionados al azar y digamos que se realizó el experimento y se obtuvieron unos resultados a los cuales se les calculó su respectiva probabilidad y se presentaron utilizando un cuadro que muestra la forma en que quedaron distribuidas las respectivas probabilidades:

Distribución de probabilidad del número de accidentes de Aeroméxico en un total de siete

X	$P(X)$
0	0.210
1	0.367
2	0.275
3	0.115
4	0.029
5	0.004
6	0.0+
7	0.0+

donde: 0.0+, significa que el valor es tan pequeño que se considera cero.

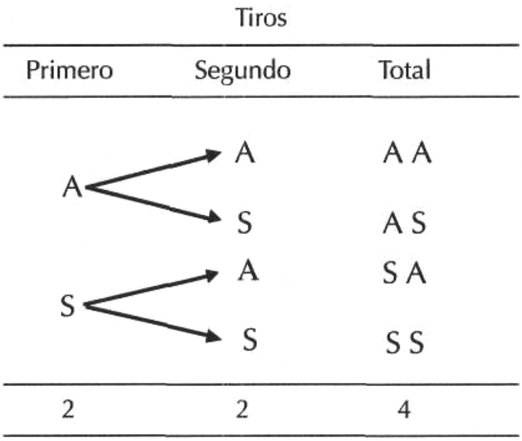
4.2 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA Y DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA ACUMULADA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

A menudo se utilizan tablas o gráficas para mostrar cómo la probabilidad total asignada a un espacio muestral se distribuye en relación con los resultados de dicho espacio. Las probabilidades indican el porcentaje de veces respecto a un gran número de observaciones en que se espera que se presenten los diversos resultados de una variable aleatoria.

También podemos decir que una vez que tenemos una distribución de probabilidad de alguna variable o algún fenómeno, una primera aproximación para mostrar su comportamiento sería el método gráfico, en el cual se puede mostrar de varias formas la manera en que se encuentran distribuidas las diferentes probabilidades, pero en este caso sólo veremos la forma en que se presentan los datos apoyándose en un gráfico conocido como distribución de frecuencia (distribución de prohabilidad individual) y distribución de frecuencia acumulada (distribución de probabilidad acumulada).

Comencemos con el ejemplo, ya que será fácil comprender estos conceptos mediante este recurso. Considere la variable aleatoria X - número de caras al tirar dos veces al aire una moneda.

El espacio muestral de este experimento lo podemos visualizar y calcular utilizando un diagrama de árbol, y sería el siguiente:



Si ahora ordenamos los valores obtenidos en el espacio muestral del experimento, de acuerdo con el criterio definido anteriormente, es decir, de acuerdo con el número de caras que se pueden obtener, tenemos:

Resultado	Probabilidad	Número de caras	$P(x)$
AA	1/4	0	0.25
AS	1/4	1	0.25
SA	1/4	1	0.25
SS	1/4	2	0.25

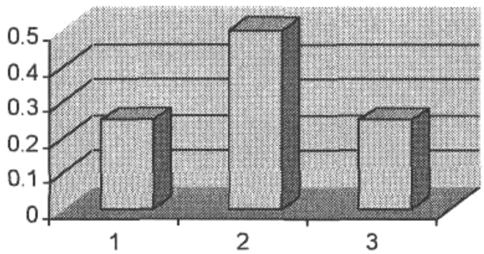
De esta manera la distribución de probabilidad[42] para el número de caras al tirar dos veces una moneda común es:

Número de caras	$P(x)$
0	0.25
1	0.50
2	0.25

Nota: hay que recordar que esto es lo mismo que hacíamos cuando transformábamos una serie simple en una serie de frecuencias, nada más que ahora las frecuencias se encuentran en términos de probabilidad.

Si expresamos estos valores en una gráfica de frecuencias o de probabilidad individual quedaría como sigue:

Histograma de frecuencias de probabilidad



Núm. de caras

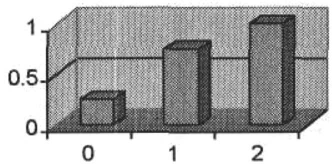
La misma distribución se puede presentar ahora en forma acumulada; recordemos que la manera de expresar un conjunto de valores de forma acumulada es la siguiente:

[42] Es importante resaltar que en una distribución de probabilidad se debe cumplir el supuesto de que la suma de todas las probabilidades siempre tiene que ser igual a uno.

Número de caras	$P(x)$	$P(x)$ Acum.
0	0.25	0.25
1	0.50	0.75
2	0.25	1.00

Gráficamente:[43]

Histograma de frecuencias acumuladas de probabilidad



Núm. de caras

Finalmente diremos que toda distribución de probabilidad debe satisfacer dos requisitos:

a. $\sum P(x) = 1$

b. $0 \leq P(x) \leq 1$

Donde: x asume todos los valores posibles para todo valor de x.

[43] Este tipo de gráficas se conoce como histograma de probabilidad, es muy semejante a los histogramas de frecuencia relativa pero en la escala vertical indica probabilidades en lugar de frecuencias reales.

Cabe mencionar que una distribución de probabilidad se puede describir mediante una tabla, gráficamente o como una función.

Como ya vimos la forma de tabla y gráfica sólo faltaría la de función, pero, para no complicar las cosas pondremos un ejemplo de lo que es una función:

Determine P (x) = x/3 (donde x puede ser 0, 1 o 2), una distribución de probabilidad.

Solución:

Para la función dada podemos ver que si evaluamos la función en los valores que puede tomar la variable obtenemos:

x	$P(x)$
0	0/3
1	1/3
2	2/3

En este caso veamos si satisface los requisitos que mencionamos anteriormente:

a. $\sum P\left(x\right)=\frac{0}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$

b. $0\leq P\left(x\right)\leq 1$ = Cada uno de los valores de probabilidad se encuentra entre 0 y 1.

Dado que sí satisface ambos requisitos la función de probabilidad dada en este ejemplo sí es una distribución de probabilidad.

El estudiante puede realizar la presentación gráfica y, si lo desea, puede comprobar lo mismo para la siguiente función: *P{x) = x/5* (donde x puede asumir los valores 0, 1, 2, 3).

4.3 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LOS OPERADORES: ESPERANZA MATEMÁTICA Y VARIANZA

En la unidad dos vimos que cualquier serie de datos ya sea simple, de frecuencias o de clases y frecuencias, tiene tres características extremadamente importantes:

a. Medidas de tendencia central (media, entre otras)
b. Medidas de dispersión (varianza y desviación estándar)
c. La naturaleza o la forma de la distribución, digamos forma de cam pana, etcétera.

En lo que respecta a las distribuciones de probabilidad, no hay que perder de vista que aunque sean valores expresados en términos de probabilidad, seguimos trabajando con series de datos y por esta razón tenemos que estimar o poder calcular estadísticos de tendencia central o de dispersión para este tipo de distribuciones. En este caso, el histograma de probabilidad que vimos puede darnos una idea de la naturaleza o la forma de la distribución de probabilidad. Pero para calcular estadísticos de tendencia central y de dispersión utilizaremos algunas fórmulas que veremos a continuación.

La media que en probabilidad se conoce con el nombre de esperanza matemática y se representa como *E* (x), la varianza y la desviación estándar de una distribución de probabilidad se pueden calcular aplicando las siguientes fórmulas:

Media o esperanza matemática: $E(x)=\sum\left[x\ P(x)\right]$

Varianza: $s^2=\sum\left[\left(x_i-\overline{x}\right)^2 * P(x)\right]$; $s^2=\left\{\sum\left[\left(x^2\right)\ \left(P(x)\right)\right]-\overline{x}^2\right\}$

Desviación estándar: $s=\sqrt{s^2}$

Cuando calculamos la media de una distribución de probabilidad que se conoce también como la esperanza matemática, obtenemos el valor promedio que esperaríamos conseguir si los ensayos pudieran repetirse indefinidamente, representa también el valor promedio de largo plazo de la variable aleatoria.

Como sabemos, la media es el valor típico que se usa para resumir una distribución de probabilidad discreta; sin embargo, no describe la cantidad de dispersión (variación) en una distribución, por su parte, la varianza sí lo hace. Ya conocemos la fórmula, los pasos para realizar el cálculo son (para la primera fórmula):

a. Restar la media a cada valor y elevar la diferencia al cuadrado.
b. Multiplicar el cuadrado de cada diferencia por su probabilidad.
c. Sumar los productos resultantes para obtener la varianza.

La desviación estándar nos da una medida de qué tanto la distribución de probabilidad está dispersa alrededor de la media. Una desviación estándar grande refleja una dispersión considerable, mientras que una desviación estándar menor refleja una variabilidad más baja con los valores relativamente cerca de la media.

Veamos un ejemplo para que se comprenda la aplicación de estos conceptos: José Luis Fraga Pérez vende automóviles nuevos de la compañía Ford; normalmente, los sábados son los días en que Luis vende el mayor número de autos, con su experiencia ha logrado construir una distribución de probabilidad para el número de vehículos que espera vender un sábado en particular.

Autos vendidos X	Probabilidad $P(X)$
0	0.10
1	0.20
2	0.30
3	0.30
4	0.10
	1.00

1. ¿Qué tipo de distribución es ésta?
2. En un sábado típico, ¿cuántos automóviles espera vender Luis?
3. ¿Cuál es la varianza de la distribución? ¿Cuál es la desviación estándar?

Solución:

1. Se trata de una distribución de probabilidad discreta. Luis espera ven der sólo un determinado número de automóviles; o también podría mos decir que sólo espera vender autos completos y no en partes.
2. Para calcular el número promedio de automóviles vendidos aplica remos la fórmula que ya conocemos.

$$E(x)=\sum\left[x\ P(x)\right]=$$

$$(0)(0.10)+(1)(0.20)+(2)(0.30)+(3)(0.30)+(4)(0.10)=2.1$$

Cuando las distribuciones son muy grandes se puede utilizar una tabla como auxiliar para realizar los cálculos; en nuestro ejemplo quedaría:

Autos vendidos X	Probabilidad $P(X)$	$(X)\ P(X)$
0	0.10	0.0
1	0.20	0.2
2	0.30	0.6
3	0.30	0.9
4	0.10	0.4
	1.00	2.1

Interpretación: este valor indica que, a lo largo de varios sábados, Luis venderá 2.1 autos al día. Por supuesto, no es posible que Luis venda exactamente 2.1 autos en un sábado específico, por lo tanto, la media a veces se conoce como valor esperado en el largo plazo. 3. Para calcular la varianza tenemos que apoyarnos en una tabla que nos permita hacer los cálculos con facilidad.

Aut. vend. X	Probabilidad $P(X)$	$(X-x)$	$(X-x)^2$	$(X-x)^2\ P(X)$
0	0.10	0 – 2.1	4.41	0.441
1	0.20	1 – 2.1	1.21	0.242
2	0.30	2 – 2.1	0.01	0.003
3	0.30	3 – 2.1	0.81	0.243
4	0.10	4 – 2.1	3.61	0.361
				1.290

El resultado sería: $s^2 = \sum\left[\left(x-\bar{x}\right)^2 * P(x)\right] = 1.290$

También podemos calcular la varianza utilizando la otra fórmula que se mencionó anteriormente, por lo general se usa la primera pero no está por demás que el estudiante conozca un camino alternativo:

Autos vendidos X	X^2	Probabilidad $P(X)$	$X^2\ P(X)$
0	0	0.10	0.0
1	1	0.20	0.2
2	4	0.30	1.2
3	9	0.30	2.7
4	16	0.10	1.6
			5.7

Una vez auxiliados por la tabla procederemos con la aplicación de la fórmula:

$$s^2 = \left\{\sum\left[\left(x^2\right)\ \left(P\,(x)\right)\right]\right\} = 5.7 - \left(2.1\right)^2 = 1.29$$

Como podemos observar se llega al mismo resultado.

Se debe recordar que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza. En nuestro problema:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1.29} = 1.136$$

Interpretación: podemos decir que la variación promedio con respecto a la media es de 1.136 autos, es decir, que las ventas pueden variar con respecto al promedio en 1.136 autos cada sábado. Otra manera de entender esto sería pensando que existe otro vendedor de autos, Pedro, y que también tiene una media de 2.1 autos pero su desviación estándar es de 1.91 autos, en este caso se podría decir que existe una mayor variabilidad en las ventas sabatinas de Pedro que en las de José Luis (porque 1.91 >1.136).

Ejercicios (4.3.1):

1. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar de la siguiente distribución de probabilidad discreta.

X	$P(X)$
0	0.20
1	0.40
2	0.30
3	0.10

2. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar de la siguiente distribución de probabilidad discreta.

X	$P(X)$
2	0.50
10	0.20
80	0.30

3. Los tres cuadros que se presentan a continuación muestran los valores de la variable aleatoria y sus probabilidades. Sin embargo, sólo uno de éstos es una distribución de probabilidad, diga cuál es.

X	$P(X)$
5	0.3
10	0.3
15	0.2
20	0.4

X	$P(X)$
5	0.1
10	0.3
15	0.2
20	0.4

X	$P(X)$
5	0.5
10	0.3
15	–0.2
20	0.4

4. Alejandro Aranda es el propietario y gerente de un negocio de desayunos. Alejandro ofrece llenar en forma gratuita las tazas de café en todas las órdenes de desayuno. Alejandro recolectó la siguiente información sobre la cantidad de veces que se vuelven a llenar las tazas. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar para la distribución del número de veces que se llenaron las tazas e interprete los resultados.

Llenado	Porcentaje
0	30
1	40
2	20
3	10

El director de admisiones de la Universidad Iberoamericana del Distrito Federal calcula la distribución de las admisiones de estudiantes para el primer semestre, con base en la experiencia previa. ¿Cuál es el número esperado de admisiones en ese semestre? Calcule la varianza y la desviación estándar e interprete los resultados.

Admisiones	Probabilidad
1000	0.6
1200	0.3
1500	0.1

4.4 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL Y BINOMIAL GENERALIZADA

4.4.1 Distribución binomial[44]

La distribución de probabilidad binomial es un ejemplo de distribución de probabilidad discreta. El término "binomial" se utiliza para designar situaciones en las que los resultados de una variable aleatoria se pueden agrupar en dos clases o categorías.

Una característica de distribución de este tipo es que sólo existen dos resultados posibles para un ensayo particular de un experimento. Hay muchos ejemplos de variables aleatorias que se pueden clasificar como binomiales: respuestas a un examen de verdadero-falso, respuestas afirmativas o negativas a un cuestionario, productos manufacturados clasificados como defectuosos o satisfactorios, pequeños de un jardín de niños que han sido vacunados o no y sistemas de calificación de aprobados o no. Además, en general, las variables con resultados múltiples se pueden tratar como binomiales cuando sólo uno de los resultados es

[44] La "distribución binomial" fue descubierta por Santiago Bemoulli en el año de 1700.

de interés. De ahí que las respuestas a un examen de opción múltiple pueden ser correctas o incorrectas; en una urna puede haber canicas de cinco colores pero si lo que deseamos es sólo sacar una canica verde, el resultado se puede considerar como verde-no verde; o bien, puede haber cinco aspirantes para una sola vacante de empleo, y el resultado final se puede establecer en términos de aceptado o no aceptado. Aun los resultados de una variable continua se pueden reducir a dos clases mutuamente excluyentes. Por ejemplo, la velocidad de un auto se puede considerar, y comúnmente así ocurre, como dentro del límite permitido de velocidad o por encima de dicho límite. Similarmente, se puede decir, si un atleta corre 1 km en menos de cuatro minutos o si no lo logró, si una persona tiene una estatura mayor de 1.80 metros o no, etcétera.

Es completamente normal referirse a las dos categorías de una distribución binomial como "éxito" y "fracaso", aunque para los objetivos del cálculo no importa a cuál le dé un nombre u otro, dado que las dos son complementos. Por ejemplo, si interviene en un juego de azar con un amigo, el éxito de usted representa el fracaso de este último.

Con frecuencia, a las observaciones de un experimento binomial se les conoce como "ensayos". Por ejemplo, un problema puede requerir la determinación de la probabilidad de cinco resultados satisfactorios en siete ensayos (observaciones).

La distribución binomial sirve para determinar la probabilidad de cierto número de resultados satisfactorios en un número dado de observaciones.[45] Por ejemplo, supóngase que se sabe que 80% de los votan-

---

[45] Otra explicación del porqué se utiliza la distribución binomial sería la siguiente: si tiramos cien veces cinco monedas perfectamente bien hechas e iguales, y registramos las veces que sale una sola moneda en águila, las veces que salen tres, las que salen cuatro, y las veces que salen águilas en las cinco monedas: formamos una distribución de frecuencias con las veces que se repiten cada uno de los sucesos; pero es posible deducir matemáticamente esta distribución sin necesidad de recurrir a la práctica. En efecto, utilizando el cálculo de la probabilidad binomial podemos definir la probabilidad de obtener cinco o cuatro águilas, las que sean sin tener que realizar todo el procedimiento largo.

tes registrados en un distrito tienen más de 30 años de edad. Si alguien quiere saber la probabilidad —en una muestra de 10 votantes registrados— de encontrar siete o más votantes mayores de 30 años, se diría entonces que el éxito es igual al número de votantes registrados, y que *P* (éxito) = 0.80.

Antes de conocer la fórmula que se requiere en el cálculo de probabilidades del tipo binomial hay que mencionar que se tienen que satisfacer ciertos supuestos, los cuales se mencionan a continuación:

a. Existen *n* observaciones o ensayos idénticos.
b. Cada ensayo tiene dos posibles resultados, uno denominado "éxito" y el otro "fracaso".
c. Las probabilidadades de éxito Py de fracaso (1-P), se mantie nen constantes para todos los ensayos.
d. Los resultados de los ensayos son independientes entre sí.

Para construir una distribución de probabilidad binomial específica, se debe conocer 1) el número de ensayos y 2) la probabilidad de éxito de cada ensayo. Ahora bien, la fórmula de la distribución de probabilidad binomial que se utiliza es la siguiente:

$$P\left(x\right) = {}_{n}C_{x} P^{x} \left(1 - P\right)^{n-x}$$

Donde: *C*- denota una combinación *n* = es el número de ensayos x = es el número de éxitos *P* - la probabilidad de éxito de cada ensayo

Veamos algunos ejemplos de cómo se utiliza la fórmula de la distribución de probabilidad binomial.

Ejemplo: Cada día, Mexicana de Aviación, tiene cinco vuelos desde el Distrito Federal a Monterrey. Suponga que la probabilidad de que alguno de los vuelos se retrase es de 0.20.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los vuelos se retrase el día de hoy?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los vuelos se retrase este día?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de los vuelos se retrasen este día?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres de los vuelos se retrasen este día?

Solución:

Utilizando la fórmula. La probabilidad de que un vuelo en particular se retrase es de 0.20, de modo que sea P = 0.20. Hay cinco vuelos, de modo que *n* = 5, y x se refiere al número de éxitos. En este caso, un éxito es un avión que llega tarde.

Si queremos resolver la primera interrogante, que el número de llegadas con retraso sea igual a cero, entonces *x* - 0. Aplicando la fórmula:

$$P(x) = {}_nC_x P^x (1-P)^{n-x}$$
$$P(0) = {}_5C_0 (0.20)^0 (1-0.20)^{5-0}$$
$$P(0) = (1)(1)(0.3277) = 0.3277$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los vuelos se retrase este día?

$$P(1) = {}_5C_1 (0.20)^1 (1-0.20)^{5-1}$$
$$P(0) = (5)(0.20)(0.4096) = 0.4096$$

c. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de los vuelos se retrasen este día?

$$P(2) = {}_5C_2 (0.20)^2 (1 - 0.20)^{5-2}$$
$$P(0) = (10)(0.04)(0.512) = 0.2048$$

d. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres de los vuelos se retrasen este día?

$$P(3) = {}_5C_3 (0.20)^3 (1 - 0.20)^{5-3}$$
$$P(0) = (10)(0.008)(0.64) = 0.0512$$

Ahora vamos a mencionar que una distribución de probabilidad binomial es una distribución teórica que, como se ha ilustrado, puede calcularse mediante la fórmula que ya hemos visto. Sin embargo, cuando los problemas involucran un valor de n, que no sea tan pequeño, los cálculos pueden ser demasiado tediosos. Para resolver estos problemas se ha desarrollado lo que se conoce como *Tablas binomiales individuales* (véase tabla 1, en el apéndice). Para utilizar las tablas sucede como en la fórmula, se requieren tres factores de información: n, que es el número de observaciones, P, que es la probabilidad de éxito, y *x,* que es la cantidad específica de éxitos. Con estos tres valores podemos calcular probabilidades del tipo binomial para problemas específicos.

En la tabla 1, se muestra parte de una tabla binomial; en la parte superior de dicha tabla se indican los valores seleccionados de P, los cuales varían en incrementos de 0.05; en la parte inicial del lado izquierdo se encuentran los tamaños de las muestras *n* y x, que se refiere a los posibles éxitos o valores que puede tomar x. Obsérvese que para cada *n* el número posible de éxitos x se listan (de 0 a *ti).*

Ahora bien, ¿cómo vamos a utilizar la tabla? Calculemos las mismas probabilidades que se pedían en el ejercicio anterior pero ahora utilicemos la tabla.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los vuelos se retrase el día de hoy? Recordemos que en este ejercicio, P = 0.20, *n* - 5 y en este caso x = 0. Con estos valores lo primero que hacemos es ubicar el valor de *n* dentro de la tabla (n = 5), después situamos el valor de x también dentro de la tabla (x = 0), y finalmente establecemos el valor de la probabilidad con la que estamos trabajando, en este caso *P*= 0.20. Cuando ya tenemos ubicados los valores encontramos el punto en donde se interceptan (el valor de x y el valor de *P)* y listo, ese es el valor de la probabilidad buscada.

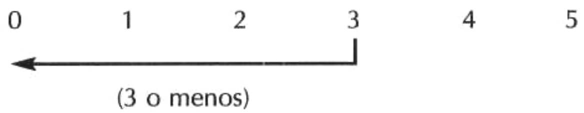
Para ilustrar este procedimiento reproducimos una pequeña parte de una tabla de probabilidad, y siguiendo el orden de los números (encerrados en círculo), podemos ver cómo se establece el valor deseado, mismo que ya habíamos calculado con anterioridad.

Tabla 1

					P			
n	*x*	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	…	0.95
1	0	0.9500	…					
	1	0.0500	…					
2	0	0.9025	…					
.	1	0.0950	…					
.	2	0.0025	…					
.								
5	0	0.7738	…		0.3277	…		
	1	0.2036	…		0.4096	…		
	2		…		0.2048	…		
	3				0.0512	…		
	4				0.0064	…		
	5				0.0003	…		

Si el estudiante ya comprendió el procedimiento, será fácil que se calculen las demás probabilidades.

Ahora bien, existen otras variantes que se presentan en el cálculo de probabilidades, por ejemplo, veamos el caso en el que se desea calcular la probabilidad de que se retrasen tres o menos vuelos.



Como debemos recordar, la fórmula y la tabla nos permiten calcular probabilidades exactas, y en este caso, como se puede ver en el dibujo, lo que se necesita saber son las probabilidades de 0,1, 2 y 3, para contestar la pregunta. Como ya las habíamos calculado podemos responder fácilmente:

$$P(3 \text{ o menos}) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0.3277 + 0.4096 + 0.2048 + 0.0512 = 0.9933$$

Pero imaginemos que no las habíamos calculado y que el número de ensayos es mayor, entonces tendríamos que realizar algunas estimaciones que serían laboriosas. Afortunadamente también como en el caso de las probabilidades anteriores, existe una tabla que tiene los valores previamente evaluados de las probabilidades de este tipo y es la que veremos a continuación.

4.4.2 Distribución binomial generalizada

También se le conoce como "distribución binomial acumulativa", como ya mencionamos anteriormente, en estadística muchos problemas requieren del empleo de la probabilidad combinada de un grupo de resultados en lugar de un resultado único. Por lo general, los resultados de interés son aquellos mayores a cierto número especificado. Por ejemplo, el interés puede concentrarse en la probabilidad de obtener cinco o menos caras en 10 tiradas de una moneda. Tales preguntas se pueden contestar utilizando una tabla de probabilidades binomiales individuales, no obstante, este método requerirá buscar las probabilidades en la tabla y después sumarlas, como ya lo vimos. Una alternativa más eficaz es utilizar una tabla de probabilidades acumuladas o acumulativas, en virtud de que este tipo de valores individuales ya se encuentran sumados (acumulados), lo que ahorra tiempo, y reduce la posibilidad de cometer errores en el cálculo.

La forma en que se presenta la tabla de probabilidades acumulativas o acumuladas es casi idéntica a la tabla de probabilidades binomiales individuales. Su uso es el mismo, nada más que en este caso el valor que se obtiene ya viene acumulado o más bien ya es la suma de todos los valores de probabilidad anteriores (véase tabla 2, en el apéndice).

Es muy importante mencionar que las probabilidades acumuladas que se muestran son para x o menos éxitos, en lugar de las probabilidades de exactamente x éxitos que se observan en la tabla de probabilidades binomiales individuales.

En la tabla 2, se muestra parte de una tabla acumulativa. Reproducimos la misma parte que en el ejemplo de la probabilidad individual para que el estudiante note la diferencia en los valores que arroja como resultados, o bien, para que se vea cómo son valores que se van acumulando:

Tabla 2

		P						
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	…	0.95
1	0	0.9500	…					
	1	1.0000	…					
2	0	0.9025	…					
.	1	0.9975	…					
.	2	1.0000	…					
.								
5	0	0.7738	…		0.3277	…		
	1	0.9774	…		0.7373	…		
	2		…		0.9421	…		
	3				0.9933	…		
	4				0.9997	…		
	5				1.0000	…		

Si retomamos el ejemplo donde nos pedían calcular la probabilidad de que se retrasaran tres o menos vuelos, en ese momento tuvimos que realizar el cálculo sumando las probabilidades individuales de cada suceso. Utilizando la tabla de probabilidades acumuladas sólo tenemos que ubicar el valor de *n,* después el valor de x, y finalmente ubicar el punto donde se interceptan y ahí se encuentra el valor buscado.

					3				
					P				
	n	*x*	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	…	0.95
	1	0	0.9500	…					
		1	1.0000	…					
	2	0	0.9025	…					
	.	1	0.9975	…					
	.	2	1.0000	…					
	.								
1	5	0	0.7738	…		0.3277	…		
		1	0.9774	…		0.7373	…		
		2		…		0.9421	…		
2		3				0.9933	…		
		4				0.9997	…		
		5				1.0000	…		

Resulta fácil verificar que este es el resultado al que habíamos llegado con el cálculo de las probabilidades individuales, pero resultó mucho menos laborioso.

Es importante mencionar que una tabla de probabilidad acumulada se puede utilizar de diferentes formas. Puede emplearse para encontrar directamente la probabilidad de que xsea igual a cierto número específico de éxitos o menor a éste. Y se puede usar indirectamente para obtener tanto la probabilidad de que x sea mayor que cierto número de éxitos, como la probabilidad de exactamente x éxitos, veamos esto.

Ya vimos el primer caso cuando buscamos la probabilidad de que x fuera menor o igual a tres vuelos retrasados, supóngase que ahora se quiere calcular la probabilidad de que x sea mayor a tres vuelos con retraso.

En este caso se utiliza el complemento, como ya sabemos que la probabilidad de que tres vuelos o menos se retrasen es igual a 0.9933, entonces, la probabilidad de que más de tres vuelos se retrasen sería:

$$\text{Si } P(x \leq 3) = 0.9933, \text{ entonces } P(x > 3) = 1 - 0.9933 = 0.0067$$

Nótese que el resultado es lo mismo que la suma de las probabilidades individuales de cuando la *P* (x - 4) y *P* (x = 5), es decir, de las probabilidades faltantes.

Cuando queremos calcular una probabilidad exacta utilizando la tabla de probabilidades acumuladas sólo tenemos que hacer una resta. Tomemos el caso donde se desea calcular la probabilidad de que se retrasen exactamente tres vuelos. Utilizando la tabla acumulada P(x = 3):

P(x3)	Comprende 1, 2 y 3	y es igual a 0.9933
P(x2)	Comprende 1 y 2	y es igual a 0.9421
P(x-3)	Comprende 3	y es igual a 0.0512

El valor de *P* (x = 3), utilizando la tabla de probabilidad acumulada se obtiene:

$$P(x = 3) = P(x \leq 3) - P(x \leq 2) = 0.9933 - 0.9421 = 0.0512$$

Podemos verificar que es el mismo resultado que ya habíamos calculado anteriormente.

Finalmente mencionaremos que, como lo vimos en unidades anteriores, cuando estudiamos las series, se necesitaba una medida de tendencia central y una medida de dispersión para describir el comportamiento de un conjunto de valores. En el estudio de las distribuciones binomiales también se calculan las medidas de tendencia central y de dispersión, que nos dan una idea del comportamiento de los valores. Las medidas son la media y la desviación estándar.

La media de una distribución binomial es el promedio a largo plazo, o el valor esperado de una variable aleatoria binomial. La desviación estándar de una distribución binomial indica el grado en que los valores muéstrales tenderán a variar a partir de la media de la distribución. Las fórmulas correspondientes son las siguientes:[46]

La media de una distribución binomial: $x=np$

La desviación estándar: $s=\sqrt{np(1-p)}$

Ejemplo: calcular la media y la desviación estándar para el ejemplo de los vuelos.

Ejercicios (4.4.1)

1. En una situación binomial $n = 4$ y p = 0.25. Determine las siguien tes probabilidades utilizando la fórmula binomial. Compruebe con las tablas que el resultado sea correcto.

   a. P(x= 1)
   b. P(x = 2)
   c. P(x = 3)

2. En una situación binomial n - 5 y p = 0.40. Determine las siguien tes probabilidades utilizando la fórmula binomial. Compruebe con las tablas que el resultado sea correcto.

---

[40] En algunos libros se maneja también el caso en el que el número de éxitos se expresa en porcentaje y no en valores absolutos, en estos casos la media y la desviación estándar se calculan aplicando las siguientes fórmulas: $\bar{x}=p$, la $s=\sqrt{p(1-p)/n}$, donde p = al porcentaje de éxito.

a. P(x = 1)
b. P(x = 2)
c. P(x = 3)

3. Los registros de una pequeña compañía de servicios indican que 40% de las facturas que envían son pagadas después de la fecha de venci miento. Si se envían 14 facturas, encuentre la probabilidad de que:

   a. Ninguna se pague con retraso.
   b. Cuando menos dos se paguen con retraso.
   c. Cuando menos la mitad se pague con retraso.

4. En una distribución binomial n = 8 y p = 0.30, encuentre las siguien tes probabilidades:

   a. La probabilidad de que x sea igual a dos.
   b. La probabilidad de que x sea igual o menor a dos.
   c. La probabilidad de que x sea igual o mayor a tres.

5. En un estudio reciente se descubrió que 90% de los hogares en el Distrito Federal tenían televisor. En una muestra de nueve hogares, cuál es la probabilidad de que:

   a. Los nueve tengan televisor.
   b. Menos de cinco tengan televisor.
   c. Más de cinco tengan televisor.
   d. Al menos siete hogares tengan televisor.

6. Un fabricante de marcos para ventanas sabe, con base en su larga experiencia, que 8% de su producción tendrá algún pequeño defecto que requerirá ajuste. Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 20 marcos:

   a. Ninguno requiera ajuste.

b. Al menos uno requiera ajuste.
c. Más de dos requieran ajuste.

4.5 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD HIPERGEOMÉTRICA

Tanto la distribución binomial como la hipergeométrica se ocupan de la misma cuestión: el número de éxitos en una muestra que contenga *n* observaciones. Lo que distingue a estas dos distribuciones de probabilidad discreta es la forma como se obtienen los datos. Para el modelo binomial, los datos de la muestra se extraen con reemplazo para una población finita o sin reemplazo para una población infinita. Por otra parte, para el modelo hipergeométrico, los datos de la muestra se extraen sin reemplazo de una población finita.

Para que se aplique la distribución binomial, la probabilidad de éxito debe permanecer igual en cada ensayo. Por ejemplo, la probabilidad de acertar la respuesta correcta en una pregunta de verdadero o falso es de 0.50. Esta probabilidad permanece igual para cada pregunta en un examen. Asimismo, suponga que 40% de los votantes registrados en una delegación sean partidarios del Partido Acción Nacional (PAN). Si se eligen al azar 27 votantes registrados, la probabilidad de elegir un partidario del PAN en la primera selección es de 0.40. La probabilidad de elegir un partidario del PAN en la segunda selección es de 0.40, suponiendo que el muestreo se realice con reemplazo, es decir, que la persona elegida se coloque de nuevo en la muestra antes de seleccionar al siguiente.

Sin embargo, la mayoría de los muestreos se realiza sin reemplazo. Así, si la población es pequeña, la probabilidad cambiará en cada observación. Por ejemplo, si la población consiste en 20 artículos, la probabilidad de seleccionar un artículo específico de esa población será de 1/20. Si la muestra se hace sin reemplazo, luego de la primera selección sólo quedarán 19 artículos; la probabilidad de elegir un artículo específico en la segunda selección es de sólo 1/19. Para la tercera selección, la probabilidad es de 1/18, y así sucesivamente. Esto supone que la población es finita,[47] es decir, la cantidad de elementos en la población es conocida y relativamente pequeña en su número.

Ejemplos de poblaciones finitas son los 5 320 afiliados al PAN en la delegación Álvaro Obregón, las 20 000 solicitudes para ingresar al nivel medio superior y los 20 estudiantes del curso de estadística descriptiva del grupo 3205.

Recuerde que uno de los criterios para aplicar la distribución binomial es que la probabilidad de éxito de un evento permanezca constante, es decir, igual de un ensayo al siguiente. Como la probabilidad no permanece igual de un ensayo a otro en los casos en que la muestra procede de una población relativamente pequeña y sin reemplazo, la distribución binomial no se utiliza. En vez de eso, se aplica la "distribución hipergeométrica".

Las condiciones que se deben cumplir para aplicar una distribución hipergeométrica son:

1. Que el tamaño de la población sea pequeño.
2. Que la selección de la muestra de una población finita sea sin reemplazo.
3. Que el tamaño de la muestra *n* sea mayor 5% de la población *N.*

Si se cumplen estas condiciones se puede aplicar la distribución hipergeométrica para determinar la probabilidad de un número específico de éxitos o fracasos.

La fórmula que se utiliza en la distribución hipergeométrica es:

$$P(x)=\frac{\left({}_{S}C_{x}\right)\left({}_{N-S}C_{n-x}\right)}{{}_{N}C_{n}}$$

[47] Una población finita podemos definirla como una población que consiste de un pequeño número de personas, objetos o mediciones.

Donde:

N es el tamaño de la población.
S es el número de éxitos en la población.
x es el número de éxitos que son de interés (en la muestra).
Puede ser 0, 1, 2, 3, ... *n* es el tamaño de la muestra
o el número de ensayos.

Ejemplos:

1. Suponga que durante la semana se fabricaron 50 estaciones de videojuegos; cuarenta de ellas funcionaron perfectamente y diez tuvieron al menos un defecto. Se seleccionó al azar una muestra de cinco sin reemplazo. Utilizando la fórmula hipergeométrica, ¿cuál es la probabilidad de que 4 de los 5 videojuegos funcionará perfectamente?

Respuesta:

Observe que el muestreo se realiza sin reemplazos, y que el tamaño de la muestra es de 5, es 5/50 x 100, es decir, 10% de la población. Esto es mayor al requerimiento de 5%. En este ejercicio:

N = 50, el número de estaciones de juego fabricadas.
n = 5, el tamaño de la muestra.
5 = 40, el número de estaciones de juego en la población que
funciona bien, x = 4, el número de aparatos en la muestra
que queremos que
funcionen bien.

Se desea encontrar la probabilidad de que cuatro estaciones en la muestra funcionen perfectamente.

Si utilizamos la fórmula, obtenemos:

$$P(x) = \frac{\left({}_{S}C_{x}\right)\left({}_{N-S}C_{n-x}\right)}{{}_{N}C_{n}} = P(4) = \frac{\left({}_{40}C_{4}\right)\left({}_{50-40}C_{5-4}\right)}{{}_{50}C_{5}} =$$

$$P(4) = \frac{\left({}_{40}C_{4}\right)\left({}_{10}C_{1}\right)}{{}_{50}C_{5}} = \frac{(91\ 390)(10)}{2\ 118\ 760} = 0.431$$

Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar 5 estaciones de juego y encontrar que cuatro funcionan perfectamente es de 0.431.

Las probabilidades hipergeométricas de que 0, 1, 2, 3, 4 y 5 estaciones de juego funcionen perfectamente en la muestra de 5 que se seleccionaron al azar la podemos observar en la siguiente tabla:

Probabilidades hipergeométricas

Estaciones que funcionan bien	Probabilidad
0	0.000*
1	0.004
2	0.044
3	0.210
4	0.431
5	0.311

(*) En realidad es 0.0001

Con la idea de comparar las distribuciones de probabilidad binomial e hipergeométrica, en la siguiente tabla se muestran las probabilidades binomial aproximada[48] e hipergeométrica para el ejercicio desarrollado es:

[48] Como 40 de las 50 estaciones funcionaron correctamente, la probabilidad binomial de elegir una estación de juego perfecta en un ensayo es de 40/50 = 0.80, y con $n = 5$, p = 0.80, se pueden utilizar las tablas de probabilidad binomial para calcular los valores correspondientes.

(*) En realidad es 0.0001

Probabilidades binomial e hipergeométrica
para el problema de las estaciones de juego

Estaciones que funcionan bien	Probabilidad hipergeométrica $P(x)$	Probabilidad binomial $n = 5,\ p = 0.80$
0	0.000*	0.000
1	0.004	0.006
2	0.044	0.051
3	0.210	0.205
4	0.431	0.410
5	0.311	0.328

Por lo tanto, cuando no es posible cumplir el requerimiento binomial de una probabilidad constante de éxito se utiliza en su lugar la distribución hipergeométrica. Sin embargo, como lo muestra la tabla anterior, en muchas condiciones los resultados de la binomial se aproximan en forma muy cercana a la hipergeométrica. Como regla debemos considerar que si el tamaño de la muestra es menor a 5% de la población, es posible usar la distribución binomial para aproximar los resultados que obtendríamos con la distribución hipergeométrica, es decir, cuando n<0.05/V, utilizar la distribución binomial será suficiente. Veamos un ejemplo de probabilidad clásica

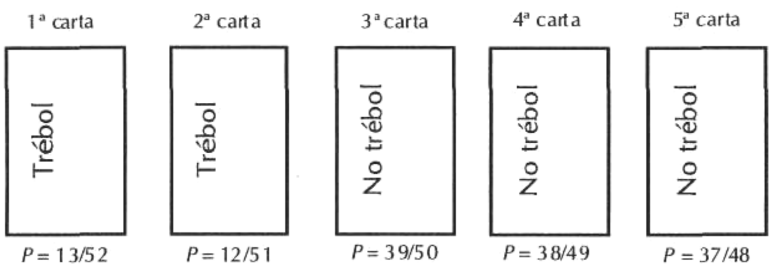
2. Supóngase que se desea determinar la probabilidad de obtener dos tréboles en cinco intentos de una baraja normal de 52 cartas bien barajada.

Respuesta:

En este caso la población, N = 52, es finita, para determinar la probabilidad, primero se debe saber si la muestra de n = 5 cartas se toma con o sin reemplazo.

En el primer caso se seleccionaría, se observaría y se remplazaría una sola carta, y después se volverían a barajar las 52 cartas antes de la siguiente selección. En estas circunstancias la probabilidad de éxito sería la misma en todos los casos, 13/52. Así mismo, el resultado de una selección es independiente del resultado de cualquier otra. En este caso, el problema se puede resolver con el criterio binomial.

Por otra parte, si se hacen cinco selecciones sin reemplazo, la probabilidad de éxito cambia de una selección a otra, según qué cartas previas se hayan seleccionado ya. Dado que se muestra sin reemplazo, una carta particular seleccionada ya no se puede tomar otra vez. Con esto, se puede describir en forma intuitiva el cálculo de la probabilidad hipergeométrica a realizar. Según el tipo de cartas que ya se hayan seleccionado, podemos ver en el siguiente dibujo el grupo de probabilidades cambiantes observadas para este ejemplo en particular:



Recordemos que en nuestro problema tenemos:

N = 52, el número de cartas.
n - 5, el tamaño de la muestra.
S - 13, el número de tréboles en el mazo de cartas.
x = 2, el número de tréboles que se quiere obtener.

Ahora bien, utilizando las combinaciones podemos determinar que hay

$$C_5^{52} = \frac{52!}{5!\ (52-5)!} = 2\ 598\ 960$$

formas diferentes pero igualmente posibles de sacar una muestra de cinco cartas de una baraja normal de 52 cartas. De estos 2 598 960 arreglos posibles, ¿en cuántas formas diferentes se pueden seleccionar dos tréboles y tres que no sean tréboles, es decir, diamantes, corazones o espadas, de una muestra de n = 5 cartas entre una población de N = 52 cartas de las cuales 13 son tréboles y 39 no lo son?

Existen $C_2^{13} = \dfrac{13!}{2!\ (13-2)!} = 78$, formas diferentes de obtener dos tréboles entre los 13 que existen en la población. Además, hay $C_3^{39} = \dfrac{39!}{3!\ (39-3)!} = 9\ 139$ formas de obtener tres cartas que no sean tréboles entre las 39 que no son tréboles en la población. Ahora, con estos resultados ya podemos aplicar la fórmula de la distribución hipergeométrica que quedaría de la siguiente forma:

$$P(x) = \frac{({}_SC_x)({}_{N-S}C_{n-x})}{{}_NC_n} = P(2) = \frac{({}_{13}C_2)({}_{39}C_3)}{{}_{52}C_5} = \frac{(78)(9139)}{2\ 598\ 960} = 0.27428$$

Finalmente mencionaremos que en este tipo de distribuciones la manera de calcular la media y la desviación estándar están dadas por las siguientes fórmulas:

$$\mu = E(x) = np$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}\quad \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

En donde la expresión $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, es un factor de corrección para una

población finita.

Ejercicios (4.5.1):

1. Tomando como referencia el ejemplo de las estaciones de juego del ejercicio 1. Compruebe la probabilidad hipergeométrica de 0.210 de que tres de las cinco estaciones elegidas al azar funcionarán correctamente.
2. Suponga que una población consta de 10 artículos, seis de los cua les están defectuosos, se elige una muestra de tres artículos. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de ellos estén defectuosos?
3. Un pequeño comerciante que se dedica a la venta de aparatos elec trodomésticos acaba de recibir un embarque de 10 televisores, poco tiempo después de recibir el embarque el fabricante llamó para decir que, de manera inadvertida, había embarcado tres aparatos defec tuosos. El propietario decidió probar 2 de los 10 aparatos que reci bió. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos aparatos estuvieran defectuosos?
4. El Departamento de Métodos Cuantitativos consta de ocho maestros, de los cuales seis son titulares. El Lie. Miguel Gutiérrez, presidente de Academia, desea establecer un comité de tres miembros docentes del departamento para revisar el plan de estudios. Si se elige a los miem bros al azar:

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los miembros del comi té sean titulares?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los miembros sea titular? (Sugerencia: para esta pregunta utilice la regla del complemento)

4.6 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE POISSON

Otra distribución de probabilidad discreta que se debe considerar debido a su utilidad es la distribución de Poisson. El modelo de Poisson se aplica a muchos fenómenos discretos y también lo podemos considerar como una forma alternativa al uso de la distribución de probabilidad binomial, es decir, en situaciones en donde *n* es muy grande y p es muy pequeña. En estos casos los cálculos de probabilidad utilizando la fórmula de la distribución binomial resultan muy tediosos.

Es posible calcular las distribuciones de probabilidad binomial para probabilidades de éxito (p) menores a 0.05, pero los cálculos tal vez consuman demasiado tiempo (en especial para una *n* grande, por ejemplo de 100 o más). La distribución de probabilidad tendrá cada vez un mayor sesgo a medida que la probabilidad de éxito disminuya. La forma de límite de la distribución binomial, cuando la probabilidad de éxito es muy pequeña y *n* es muy grande, se denomina "distribución de probabilidad de Poisson". Frecuentemente se le conoce como la Ley de los Eventos Improbables, lo que significa que la probabilidad p de que ocurra un evento específico es muy pequeña.

La fórmula que se utiliza para el cálculo de probabilidades en distribuciones de Poisson es:

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \text{ otra forma sería: } P(x) = \frac{\mu^x}{x!e^{\mu}}$$

Donde:

(j, *(mu)* es el número promedio de ocurrencias (éxitos) durante un intervalo específico de tiempo, también se puede calcular *np.*

e es la constante 2.71828 (base del sistema de logaritmos naturales).

x es el número de ocurrencias (éxitos).

Es importante mencionar que la distribución de Poisson tiene un solo parámetro que la describe que es: *\i,* es decir, la media y la varianza (la medida de tendencia central y de dispersión) de un modelo de Poisson se consideran iguales.

$$\mu = E(x) = np$$
$$\sigma = \sqrt{Var(x)} \cong \sqrt{np}$$

De esta manera, sabiendo que una variable aleatoria está distribuida mediante el método de Poisson, y conociendo el número promedio de ocurrencias por unidad, se puede determinar la probabilidad para cualquiera o todos los resultados posibles.

Como sucede con la distribución binomial existen tres métodos para calcular probabilidades: la fórmula, tablas individuales y tablas acumuladas. A continuación veremos cada una de estas formas.

Ejemplo:

Suponga que es muy raro que Mexicana de Aviación pierda el equipaje de un pasajero. La gran mayoría de los vuelos no tiene problemas de mal manejo de equipaje; algunos de ellos tienen una maleta perdida; en unos pocos se pierden dos maletas y es muy raro un vuelo en el que hay tres o más maletas perdidas. Suponga que una muestra aleatoria de 1000 vuelos indica que un total de 300 maletas se perdieron. Por lo tanto, como nos enfrentamos a un problema en donde *n* es muy grande y la probabilidad de que se presente una pérdida de equipaje es muy pequeña, podemos decir que la distribución de probabilidad es de tipo Poisson, en este caso, la media aritmética de maletas perdidas por vuelo es de 0.3, que se encuentra: 300/1000.

Como ya mencionamos, si el número de maletas perdidas por vuelo sigue una distribución de Poisson con ¡J,= 0.30, es posible calcular varias probabilidades.

Calcule la probabilidad de no perder ninguna maleta, una maleta, dos maletas y tres maletas

Respuesta:

Utilizando la fórmula, vamos a calcular la probabilidad de que no se pierda ninguna maleta: P(x= 0)

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = P(0) = \frac{(0.3)^0 (e^{-0.30})}{0!} = 0.7408$$

La interpretación sería que 74% de los vuelos no tendrá problemas de equipaje perdido.

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = P(1) = \frac{(0.3)^1 (e^{-0.30})}{1!} = 0.2222$$

La interpretación sería que 22% de los vuelos pueden perder una maleta.

La probabilidad de que se pierdan dos maletas: *P(x - 2)*

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = P(2) = \frac{(0.3)^2 (e^{-0.30})}{2!} = 0.0333$$

La probabilidad de que se pierdan tres maletas: *P* (x = 3)

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = P(3) = \frac{(0.3)^3 (e^{-0.30})}{3!} = 0.0033$$

Ahora vamos a mencionar que una distribución de probabilidad de Poisson es una distribución que, como se ha ilustrado, puede calcularse mediante la fórmula que ya hemos visto. Sin embargo, como en el caso de la distribución binomial, también existen tablas de Poisson individuales (véase tabla 3, en el apéndice). Para utilizar las tablas se requieren dos factores de información: *[i* que es la media aritmética y el valor de x, que es la cantidad específica de éxitos. Con estos dos valores podemos calcular probabilidades de Poisson.

En la tabla 3 se muestra parte de una tabla de Poisson. En la parte superior de dicha tabla se indican los valores de \i, los cuales varían en incrementos de 0.1. En la parte inicial del lado izquierdo se encuentran los valores de x, que se refiere a los posibles éxitos o valores que puede tomar x.

Ahora bien, ¿cómo vamos a utilizar la tabla? Calculemos las mismas probabilidades que se pedían en el ejercicio anterior pero ahora utilicemos la tabla.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no se pierda ninguna maleta? Recordemos que en este ejercicio, \i - 0.30, y x = 0. Lo primero que haremos es visualizar el valor de x, dentro de la tabla (x = 0), y ubicamos el valor de la media con la que estamos trabajando en este caso ^i - 0.30. Cuando ya tenemos establecidos los valores encontramos el punto en donde se interceptan (el valor de x y el valor de *H)* y listo ese es el valor de la probabilidad buscada.

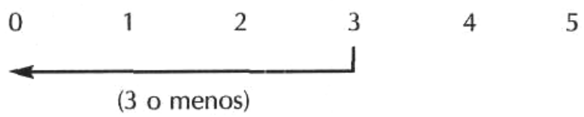
Para ¡lustrar este procedimiento reproducimos una pequeña parte de una tabla de probabilidad y siguiendo los números podemos ver cómo se ubica el valor deseado y nos damos cuenta que es el mismo que ya habíamos calculado con anterioridad.

Tabla 3

			μ				
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	...	0.9
0	0.9048	...	0.7408	...			
1	0.0905	...	0.2222	...			
2	0.0045		0.0333				
3	0.0002	...	0.0033	...			
4	0.0000	...	0.0003	...			
		...		...			
5	0.0000		0.0000				

Si el estudiante ya comprendió el procedimiento será fácil que se calculen las demás probabilidades, o bien, son las que se encuentran enseguida de la que ubicamos.

Ahora bien, existen otras variantes que se presentan en el cálculo de probabilidades, por ejemplo, veamos el caso en el que se desea calcular la probabilidad de que se pierdan tres o menos maletas.



Como debemos recordar, la fórmula y la tabla nos permiten calcular probabilidades exactas, y en este caso, como se puede ver en el dibujo, lo que se necesita saber son las probabilidades de 0, 1, 2 y 3, para contestar la pregunta. Como ya las habíamos calculado podemos responder fácilmente:

$$P(3 \text{ o menos}) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0.7408 + 0.2222 + 0.0333 + 0.0033 = 0.9997^{*}$$

(*) En realidad la suma es 0.9996, pero lo correcto debe ser 0.9997, el error se debe al redondeo.

Como en el caso de la distribución binomial, la distribución de Poisson, en muchos casos, requiere del empleo de la probabilidad combinada de un grupo de resultados en lugar de un resultado único. Por ejemplo, el interés puede concentrarse en la probabilidad de perder tres o menos maletas. Tales preguntas se pueden contestar utilizando una tabla de probabilidades individuales de Poisson, no obstante, este método requerirá buscar las probabilidades en la tabla y después sumarlas (como ya lo vimos). Una alternativa más eficaz es utilizar una tabla de probabilidades acumuladas o acumulativas, puesto que en una tabla de este tipo los valores individuales ya se encuentran sumados (acumulados), lo que ahorra tiempo y reduce la posibilidad de cometer errores en el cálculo.

4.6.1 Tabla de probabilidades acumuladas de Poisson

La forma en que se presenta la tabla de probabilidades acumulativas o acumuladas es casi idéntica a la tabla de probabilidades individuales de Poisson. Su uso es el mismo, sólo que en este caso el valor que se obtiene ya viene acumulado, o más bien, es la suma de todos los valores de probabilidad anteriores (véase tabla 4).

La tabla 4 muestra parte de una tabla acumulada de Poisson. Reproducimos la misma parte que en el ejemplo de la probabilidad individual para que el estudiante note la diferencia en los valores que arroja como resultados, o bien, para que se note como valores que se van acumulando:

Tabla 4

		2		μ		
	x	0.30	0.32	0.34	…	0.48
	0	0.7408	…		…	
	1	0.9631	…		…	
	2	0.9964				
	3	0.9997	…		…	
1	4	1.0000	…		…	

Si retomamos el ejemplo donde nos pedían calcular la probabilidad de que se perdieran tres o menos maletas, en ese momento tuvimos que realizar el cálculo sumando las probabilidades individuales de cada suceso. Utilizando la tabla de probabilidades acumuladas, sólo tenemos que ubicar el valor de x y \i y, finalmente, ubicar el punto donde se interceptan y ahí se encuentra el valor buscado como se muestra en la parte superior.

Resultó fácil verificar que era el resultado al que habíamos llegado con el cálculo de las probabilidades individuales, pero fue mucho más sencillo de calcular.

Es importante mencionar que una tabla de probabilidad acumulada se puede utilizar de diferentes formas. Puede emplearse para encontrar de manera directa la probabilidad de que x sea igual a cierto número específico de éxitos o menor a éste. Y se puede utilizar indirectamente para obtener tanto la probabilidad de que xsea mayor que cierto número de éxitos, como la probabilidad de exactamente x éxitos.

Ya vimos el primer caso cuando buscamos la probabilidad de que x fuera menor o igual a tres vuelos retrasados; supóngase que ahora se quiere calcular la probabilidad de que x sea mayor a tres vuelos con retraso.

En este caso se utiliza el complemento; como ya sabemos que la probabilidad de que tres vuelos o menos se retrasen es igual a 0.9997, entonces la probabilidad de que se extravíen más de tres maletas sería:

$$\text{Si } P(x \leq 3) = 0.9997, \text{entonces } P(x > 3) = 1 - 0.9997 = 0.0003$$

Cuando queremos calcular una probabilidad exacta utilizando la tabla de probabilidades acumuladas, sólo tenemos que hacer una resta, veamos. Tomemos el caso en donde se desea calcular la probabilidad de que se pierdan exactamente tres maletas. Utilizando la tabla acumulada P(x=3):

$P\,(x\ 3)$	Comprende 1, 2 y 3	y es igual a 0.9997
$P\,(x\ 2)$	Comprende 1 y 2	y es igual a 0.9964
$P\,(x = 3)$	Comprende 3	y es igual a 0.0033

El valor de *P* (x = 3), utilizando la tabla de probabilidad acumulada se obtiene:

$$P\,(x = 3) = P\,(x \leq 3) - P\,(x \leq 2) = 0.9997 - 0.9464 = 0.0033$$

Podemos verificar que es el mismo resultado que ya habíamos calculado anteriormente.

Ejercicios (4.6.1):

1. Utilice una tabla de Poisson para determinar cada una de las siguientes probabilidades:

Media	Probabilidad
1	1
1.5	0
2	1 o menos
3	1 o menos
3	Más de tres
3	3
4	3
4.2	Más de cinco

2. En un conmutador se registran llamadas telefónicas a razón de 4.6 llamadas por minuto. Calcule la probabilidad de que se presente cada una de estas ocurrencias en un intervalo de un minuto:

   a. Exactamente dos llamadas.
   b. Por lo menos dos llamadas.
   c. Ninguna llamada.
   d. De dos a seis llamadas.

3. Una empresa que se dedica a cultivar semillas híbridas experimenta problemas con el gusano barrenador del maíz. Una prueba aleatoria de 5000 mazorcas reveló lo siguiente: muchas de las mazorcas no tenían gusanos; otras mazorcas tenían un gusano; algunas tenían dos gusanos, etc. La distribución del número de gusanos por mazorca se aproxima a la distribución de Poisson. La empresa contó 3500 gusa nos en las 5000 mazorcas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una mazorca de maíz seleccio nada al azar no contenga gusanos?
b. Desarrolle una distribución de probabilidad de Poisson para este experimento (es decir, calcule varias probabilidades, hasta 6).

4. En una distribución de Poisson con media igual a 0.4
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que x = 0?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que x > 0?

5. En una distribución de Poisson con media igual a 4

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que x =2?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que x< 2?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que *x* > 2?

6. La Lic. Laura Vega Rangel es funcionaría de Crédito en Banamex, con base en los años de experiencia, ella calcula que la probabili dad de que un solicitante no sea capaz de pagar los plazos del crédito que se le otorgó es de 0.025. El mes pasado, la Lie. Laura otorgó 40 créditos.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que no se recuperen tres de estos créditos?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que no se recuperen al menos tres de esos créditos?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que x > 2?

7. Los autores y editores de libros de texto trabajan muy duro para reducir al mínimo la cantidad de errores en un texto. No obstante, algunos son inevitables. El señor Alfredo Abarca, editor de temas de estadística, informa que el número promedio de errores por capítu lo es de 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que existan menos de dos errores en un capítulo específico?

5. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

Hay tantas cosas para gozar
y nuestro paso por la tierra es tan corto,
que sufrir es una pérdida de tiempo.

FACUNDO CABRAL

Objetivos:

Al finalizar el capítulo el alumno será capaz de:

- Comprender el concepto de variable aleatoria continua y su distribución.
- Comprender el concepto y las propiedades de la distribución normal, normal estándar y t de Student.
- Resolver problemas aplicando estos conocimientos.

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior estudiamos las diferentes formas en las cuales se pueden calcular las probabilidades para las variables discretas utilizando los métodos de probabilidad binomial, hipergeométrica y de Poisson. En este capítulo continuaremos con el estudio de las probabilidades, pero ahora nos concentraremos en el cálculo de probabilidades de variables continuas.

5.1 DEFINICIÓN

Las variables aleatorias continuas son aquellas que pueden tomar cualquier valor de entre todos los contenidos en un intervalo dado, también podemos decir que una variable continua es aquella que, dados dos valores de la variable, siempre va a existir un valor intermedio entre ellos por muy cercanos que éstos sean. También podemos decir que una variable se considera continua si el conjunto de valores posibles que puede tomar se encuentran muy cercanos unos de otros, al grado de que si los representamos en un plano cartesiano lo que podríamos ver es casi una curva o una línea continua.

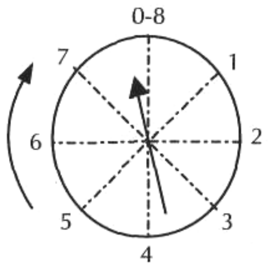
Por ejemplo, algunas variables aleatorias que se pueden considerar como continuas y que son de uso común son:

a. Las estaturas o pesos de un grupo de personas (un grupo grande).
b. La duración de un producto como un foco, la refacción de una máquina o un producto alimenticio.
c. El tiempo necesario para llevar a cabo un determinado trabajo.
d. Los errores de medición que resultan de experimentos de labo ratorios.
e. Los resultados de los tiempos registrados por los corredores de 100 metros planos durante los últimos 10 años.

f. El ingreso diario de un conjunto de habitantes de la Ciudad de México.

Cuando una variable aleatoria es continua no se pueden utilizar las distribuciones probabilísticas discretas como la Poisson y la binomial para obtener probabilidades importantes. Veamos por qué una variable continua, debido a que los resultados incluyen valores enteros y no enteros, no se puede manejar en forma adecuada mediante una distribución discreta.

La diferencia entre la probabilidad de una variable discreta y de una variable continua la podemos entender utilizando un ejemplo muy sencillo:

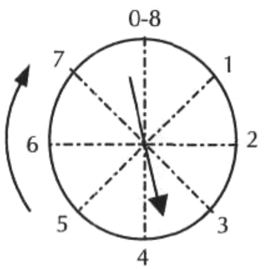


La flecha giratoria que se encuentra en el centro de la circunferencia de la figura anterior ilustra el concepto de variable continua. Una vez que se hace girar la flecha podrá detenerse en cualquier punto dentro del círculo y no precisamente en alguno de los valores enteros. Aun aceptando las limitaciones propias de hacer mediciones alrededor del círculo existe un número extremadamente grande de posibles puntos de reposo.

Por ejemplo, imagínese que el círculo se puede dividir en 8000 partes iguales en lugar de ocho. Si se supone que cada posición tiene la misma probabilidad de ser el punto de reposo se llegará a la siguiente conclusión: dado que hay muchos resultados posibles, la probabilidad de que la punta de la flecha señale un valor determinado es tan pequeña que para fines prácticos deberá considerarse como aproximadamente igual a cero, esto quiere decir que es casi imposible predecir el punto exacto donde se detendrá la flecha, de hecho la tecnología moderna nos permite dividir un círculo en por ló menos un millón de partes iguales, por lo que la probabilidad de que la flecha se detenga en un determinado punto, usando la forma de calcular la probabilidad que ya conocemos, sería 1/1 000 000 = 0.000001.

Debido a esta peculiaridad podemos decir que, cuando trabajamos con variables continuas, realmente no tiene sentido hablar en términos de la probabilidad de obtener algún resultado específico como se hizo cuando trabajamos con las distribuciones de probabilidad discretas.

Por lo tanto, el análisis de variables continuas tiende a concentrarse en la probabilidad de que una variable aleatoria asuma un valor dentro de un intervalo. Tomando este criterio, la probabilidad de que la flecha se detenga entre los valores de 3 y 4, sería igual a 1/8, como podemos ver en la figura siguiente:



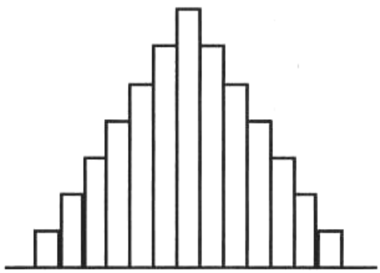
En forma muy similar, se asignaría una probabilidad de 25% al evento "la flecha se detiene entre los puntos 4 y 6" (un cuarto de círculo). De este modo la probabilidad de que la flecha se detenga entre dos puntos cualquiera es igual al porcentaje del área correspondiente a esos dos puntos.

Por lo tanto, podemos decir que en el caso de una variable aleatoria continua se puede determinar la probabilidad al obtener el porcentaje del área entre dos valores.

Antes de pasar al tema siguiente, conviene hacer una aclaración para que el estudiante se dé cuenta que siempre que hablamos de probabilidad, al mismo tiempo lo hacemos de un porcentaje, basta con recordar que la probabilidad de cualquier evento no es más que la división de un número de eventos favorables entre el total de eventos posibles y ¿qué es eso?, una razón que se puede expresar en términos de porcentaje.

5.2 DISTRIBUCIÓN NORMAL

Las distribuciones normales fueron descubiertas por primera vez en el siglo xvin. Los astrónomos y otros científicos observaron con cierto asombro que las mediciones repetidas de un gran número de veces de un mismo fenómeno tendían a variar y que al reunir grandes cantidades de estas mediciones y agruparlas en las distribuciones de frecuencias correspondientes, tendía a reaparecer constantemente un perfil semejante al siguiente:



A partir de ese entonces se puede generalizar este criterio o aplicarlo a casi cualquier fenómeno, siempre y cuando se cuente con un buen número de observaciones.

Debemos entender por "normal" que la mayoría de observaciones tiende a agruparse en el centro, aunque existan algunas que por diversas razones no cumplen con esa característica y forman los extremos.

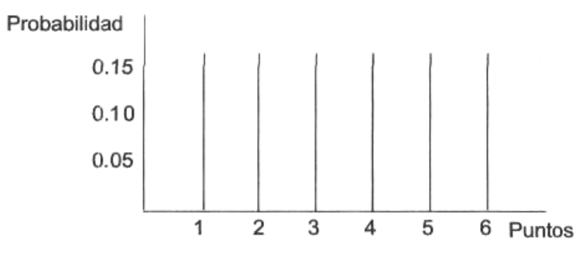
Veamos un ejemplo clásico de cómo a medida que aumentamos el número de observaciones al agruparlas y presentarlas de forma gráfica, tiende a surgir la forma de la distribución normal.

Supóngase que un dado se tira dos veces y se registra la suma del número de puntos. De modo que si en el primer lanzamiento del dado cae un 3, y en el segundo un 4, el total es el que interesa, es decir, 7 ¿cuál es la forma de la población de los números de puntos?, ¿cuáles son los resultados posibles en el experimento?, ¿Cuál es la forma de la distribución de la suma de los números de puntos cuando se tira un dado dos veces?

Solución:

La población es una distribución uniforme en la que cada uno de los números enteros del 1 al 6 tiene la misma probabilidad de ocurrencia. La tabla y el diagrama siguientes muestran los diferentes resultados en la población y sus probabilidades correspondientes para cada uno (podemos ver que, gráficamente, la probabilidad es la misma para cada uno):

Resultados posibles	Probabilidad
1	1/6 = 0.1667
2	1/6 = 0.1667
3	1/6 = 0.1667
4	1/6 = 0.1667
5	1/6 = 0.1667
6	1/6 = 0.1667



Ahora, si se tira el dado dos veces, el número total de puntos que salgan puede resumirse como sigue:

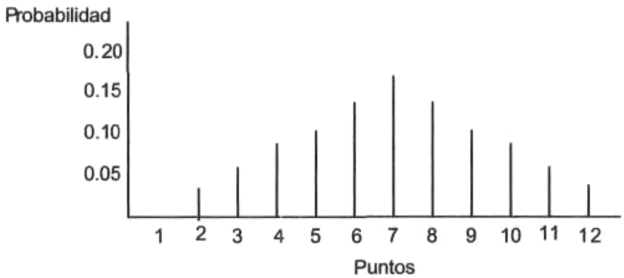
1a.		Número total de puntos					
T	6	7	8	9	10	11	12
i	5	6	7	8	9	10	11
r	4	5	6	7	8	9	10
a	3	4	5	6	7	8	9
d	2	3	4	5	6	7	8
a	1	2	3	4	5	6	7
		1	2	3	4	5	6
		Segunda tirada					

Por ejemplo, si en el primer tiro del dado cae un 4, y en el segundo un 6, el total es 10. Después se desea obtener una distribución para el número total de puntos que aparecen. En relación con la tabla se ve que hay 36 resultados posibles. En una ocasión el número total de puntos es 2, y en otra el total es 12. Hay 3 ocasiones en las que el total es de 4; 6 en las que es de 7, y así sucesivamente. En este momento quizá se notó ya que se puede determinar el número de resultados observando en las diagonales desde la parte superior izquierda hacia la parte inferior derecha. El número total de puntos y la probabilidad de que caiga cada uno se resume en la tabla y el diagrama siguientes:

Resultados posibles	Núm. de veces que aparece	Probabilidad
2	1	1/36 = 0.0278
3	2	2/36 = 0.0556
4	3	3/36 = 0.0833
5	4	4/36 = 0.1111
6	5	5/36 = 0.1389

Continúa

7	6	6/36 = 0.1667
8	5	5/36 = 0.1389
9	4	4/36 = 0.1111
10	3	3/36 = 0.0833
11	2	2/36 = 0.0556
12	1	1/36 = 0.0278



Obsérvese el cambio en la forma de distribución de las sumas con respecto a la de la población. Se empezó con una población que era uniforme para los números enteros discretos del 1 al 6. Cuando se lanzó el dado dos veces y se observó el número total de puntos, la distribución cambió a una de forma muy parecida a la distribución normal.

Finalmente, como práctica, usted puede hacer el ejercicio en donde se tira el mismo dado pero tres veces; al considerar la distribución de las sumas de los puntos se observará que la estructura de la distribución cambia y se dirige a una del tipo normal en forma de campana. Esto fue un resultado interesante que intrigó a los matemáticos del siglo XVII y dio pauta para muchas aplicaciones modernas.

Una vez comprendido que es a partir de los datos reales de donde surgieron las curvas del tipo normal agregaremos que posteriormente se descubrieron las distribuciones de este tipo, mismas que se pueden definir o generalizar mediante una distribución matemática continua que es la siguiente:

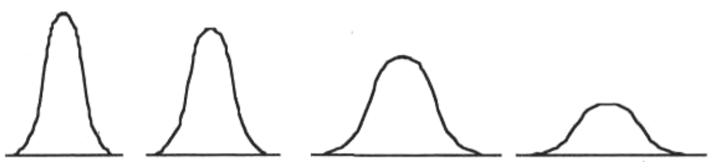
$$f(y)=\frac{e^{-(x-\mu)^2/2\sigma}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$e,\ \pi$

μ y σ,

A esta distribución también se le conoce como distribución gausiana en reconocimiento a las aportaciones de Carlos Federico Gauss (1777-1855), a la teoría matemática de la distribución normal.

La fórmula resulta abrumadora para los estudiantes pero no es necesario aplicarla realmente. Lo que sí es importante resaltar es que la fórmula nos dice que cualquier distribución normal específica está determinada por dos parámetros: la media y la desviación estándar. Una vez que se determinan valores específicos para la μ y σ se puede trazar la gráfica aplicando la fórmula como en cualquier ecuación que relacione valores para x y *y,* el resultado es una distribución en forma de campana. Es importante resaltar que las infinitas combinaciones entre media y desviación estándar pueden generar una infinidad de curvas de tipo normal como los siguientes ejemplos:



Finalmente, una vez que ya se conoció lo que es una curva normal, cabe mencionar, en resumen, las características especiales que tienen las curvas normales en términos de su configuración y de la forma como están especificadas y como se utilizan para obtener probabilidades.

5.2.1 Características de la distribución normal

a. La curva normal tiene forma de campana.
b. Es simétrica con respecto a la media de la distribución.
c. Se extiende de $-\infty$ a $+\infty$, de forma asintótica.[49]
d. Cada distribución normal es completamente definida por su media y su desviación estándar. Existe una curva de distribución normal diferente para cada combinación de μ y σ.
e. El área total bajo la curva normal se considera igual a 1 o 100%.
f. El área bajo la curva entre dos puntos es igual a la probabilidad de que una variable distribuida normalmente asuma un valor entre ellos.
g. Dado que existe un número ¡limitado de valores en el intervalo que va de $-\infty$ a $+\infty$, la probabilidad de que una variable aleatoria distribuida con normalidad sea exactamente igual a cualquier valor dado es casi cero. Por lo tanto, las probabilidades siempre serán para un intervalo de valores.

5.3 DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

En realidad la distribución normal es una familia de distribuciones infinitamente grande, hay una para cada combinación posible de la media y la desviación estándar.

En consecuencia, sería inútil intentar elaborar las tablas que nos proporcionen la probabilidad de cada uno de los casos distintos que se pueden presentar de acuerdo con las necesidades de los usuarios. Sin

[49] Por asintótica debemos entender que es una curva donde sus extremos se acercan mucho al eje de las *x* pero nunca lo tocan, o podemos decir que toman valores muy cercanos a cero pero nunca cero.

embargo, existe una alternativa sencilla que evita estos problemas cuando tenemos un conjunto de valores que tiende a tomar un comportamiento de tipo normal, lo primero que debemos considerar es que el área bajo la curva siempre es igual a 100% de la probabilidad, se estandariza cualquier curva, es decir, cualquier conjunto de valores se puede definir con este criterio.

Si se considera el área bajo la curva de cualquier distribución normal igual a 100%, en esta circunstancia se puede utilizar la media como punto de referencia y la desviación estándar como una medida de la desviación de dicho punto de referencia, y con este criterio se puede reordenar cualquier distribución normal para ser expresada en una forma estandarizada.

Cuando se toma este criterio de estandarización, cualquier valor real puede ser transformado en su equivalente medido en términos de su desviación estándar y con esto se genera una escala que se conoce como escala z, que se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

Donde:

z = Número de desviaciones estándar a las que se encuentra el valor de interés a partir de la media

x = Valor de interés

\i = Media de la distribución normal

o = Desviación estándar

Veamos un ejemplo para que se comprenda la forma en que se estandarizan los valores de una población que tiene un comportamiento de distribución normal.

$\mu = 100$ y $\sigma =$

Considere una variable de distribución normal con una

10. Convertir los valores de escala real a valores de escala estandarizada.[50]

Respuesta:

Los valores reales (x), se transforman a valores estandarizados aplicando la fórmula *z* y eso resulta muy sencillo:

$$x = 100 \qquad z = \frac{100 - 100}{10} = \frac{0}{10} = 0$$

$$\therefore \quad x = 100 \;\Rightarrow\; z = 0$$

$$x = 110 \qquad z = \frac{110 - 100}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\therefore \quad x = 110 \;\Rightarrow\; z = 1$$

$$x = 120 \qquad z = v\frac{120 - 100}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\therefore \quad x = 120 \;\Rightarrow\; z = 2$$

$$x = v80 \qquad z = \frac{80 - 100}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

$$\therefore \quad x = 80 \;\Rightarrow\; z = -2$$

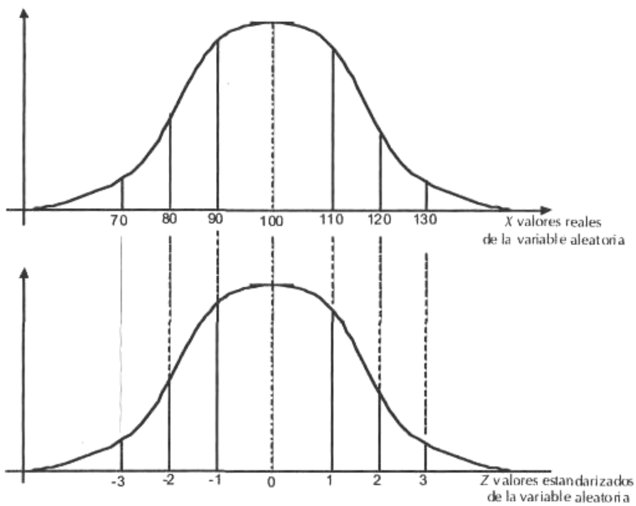
$$x = 90 \qquad z = \frac{90 - 100}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

$$\therefore \quad x = 90 \;\Rightarrow\; z = -1$$

Gráficamente los valores reales transformados en valores estandarizados quedarían de la siguiente forma:

---

[50] Es decir, convertir la diferencia real entre la media y algún otro valor de la distribución en una diferencia relativa, expresando dicha diferencia en términos del número de desviaciones estándar de la media.



Se debe reflexionar sobre la importancia de ese hecho. Esto significa que el problema de trabajar con una familia infinita de distribuciones normales se puede evitar. Si es posible, intente manejar valores relativos, es decir, valores *z,* en lugar de valores reales.

Veamos algunos ejemplos de cómo se realiza la conversión de la diferencia real entre la media y otro valor a la *z* distancia relativa, es decir, transformarlo en valor z, en términos del número de desviaciones estándar.

μ	σ	Valor de interés x	Diferencia $x-\mu$	Diferencia relativa $(x-\mu/\sigma) = z$
40	1.0	42	2.0	+2
25	2.0	23	−2.0	−1
30	2.5	37.5	7.5	+3
18	3.0	13.5	−4.5	−1.5
22	4.0	22	0.0	0

Es importante mencionar que también se puede trabajar en orden inverso, es decir, pasando de los valores de *z* a valores reales. En algunos problemas se cuenta con la información de la media, la desviación estándar y se puede deducir un área bajo la curva específica, en estos casos se requiere encontrar el valor real y se aplica la siguiente fórmula:

$$x = \mu + z\sigma$$

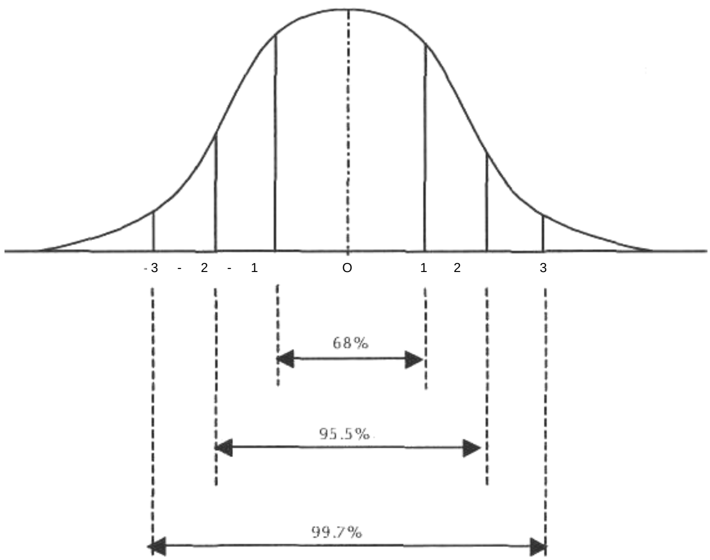
Veamos algunos ejemplos de cómo se puede pasar de valores de z a valores reales.

μ	σ	Z	$\mu + z\sigma$	Valor real X
20	1	+3	20+3(1)	23.0
50	3	−1	50−1(3)	47.0
60	2	−2	60−2(2)	56.0
72	5	+0.3	72+0.3(5)	73.5

Una vez que el estudiante ha comprendido la forma de trabajar con los valores z, pasemos al estudio de la forma en cómo se utilizan estos valores z en el cálculo de probabilidades.

Vale la pena mencionar que el criterio de estandarización de las funciones del tipo normal, es decir, al expresar cualquier función en términos de su media y de su desviación estándar, los estudiosos del tema lograron observar una característica que se cumplía para cualquier función del tipo normal con respecto a su media y sus desviaciones estándar, la característica es la siguiente:

Si una variable (un conjunto de valores) está distribuida normalmente, entonces 68% de sus valores quedarán dentro de un intervalo formado por una desviación estándar, más y menos de su media; 95.5% caerán dentro de dos desviaciones estándar más menos de la media, y casi 99.7% de la observaciones quedarán incluidas en el intervalo formado por +-3 desviaciones estándar de la media. Esta ¡dea la podemos ¡lustrar en la siguiente figura:



Esto se cumple para el caso de cualquier distribución de tipo normal.

Pasemos al uso que tienen los valores z en el cálculo de probabilidades. El poder convertir cualquier valor real de cualquier distribución de tipo normal en un valor z, permite determinar varias probabilidades mediante el uso de una tabla estandarizada única ideada para este fin.

5.3.1 Tabla normal estándar

El área bajo la curva de cualquier distribución normal se puede encontrar utilizando una tabla normal estándar (véase tabla 5, en el apéndice), y cambiando a unidades estándar la escala de unidades reales. La media de la distribución sirve como punto de referencia y la desviación estándar como la unidad que mide distancias relativas a partir de la media.

La tabla normal estándar fue ideada de manera que se pueda leer en unidades *z.* La tabla muestra el área bajo la curva, es decir, la probabilidad de que un valor quede en ese intervalo, entre la media y los valores seleccionados.

Antes de utilizar la tabla hay que considerar las siguientes observaciones que son de mucha utilidad:

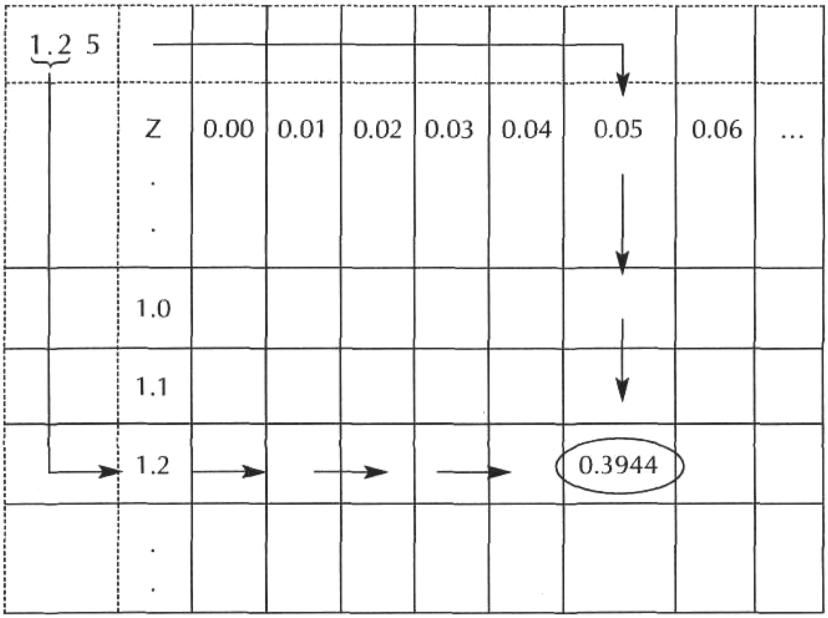
a. Los valores de probabilidad, las áreas bajo la curva, que nos propor ciona la tabla son valores calculados a partir de la media hasta el valor z seleccionado.
b. La tabla normal también se puede utilizar para calcular áreas bajo la curva más allá de un valor dado de z. La clave, en este caso, es que la mitad del área es 50% y, por lo tanto, el área de un valor más allá de z es igual a 50% menos el valor de z en tablas.
c. La media de la distribución siempre toma el valor de cero, es decir, se encuentra a cero desviaciones de sí misma.
d. Como la distribución normal es simétrica con respecto a su media, el lado izquierdo de la curva es una imagen idéntica de su lado dere cho. Debido a esta simetría en la tabla sólo se proporcionan los valo res para la mitad derecha de la distribución.
e. Valores de z mayores a 4 se aproximan a un resultado de 0.5000 o 50%.

Uso de la tabla:

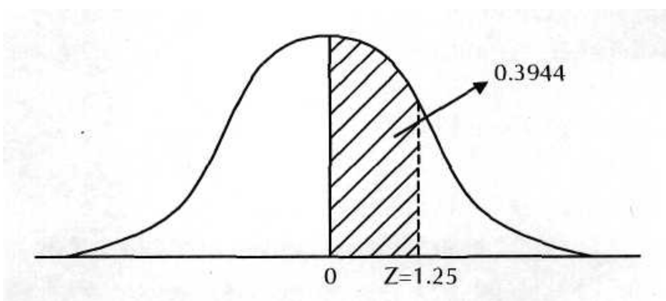
La tabla se encuentra ordenada en términos de valores de z, hasta dos decimales, como por ejemplo: 2.78, 1.04 y 2.45. Una particularidad de una tabla normal típica es que los valores *z* se presentan en dos partes. Los valores del entero y el primer decimal (2.7, 1.0 y 2.4) se enumeran hacia abajo en el lado izquierdo de la tabla, es decir, primera columna, mientras que el último dígito aparece en la parte superior.

Veamos un ejemplo: calculando el área bajo la curva entre la media y un valor z, suponga que se quiere obtener el área entre la media y un valor z, cuando z = 1.25.

En primer lugar se debe localizar el valor de 1.2, en el lado izquierdo de la tabla y posteriormente el valor de 0.05 (5 es el último dígito), en la parte superior. El área bajo la curva se puede encontrar (leer) en la intersección de la fila z = 1.2 y la columna 0.05. El valor es 0.3944, que se refiere al porcentaje del área bajo la curva normal entre la media y un valor z= 1.25.



Evidentemente, este porcentaje equivale a la probabilidad de que una variable aleatoria distribuida normalmente tenga un valor entre la media y un valor real equivalente a 1.25 desviaciones estándar sobre la media. En términos gráficos quedaría de la siguiente manera:



Veamos algunos ejemplos en los cuales el estudiante tiene que buscar las áreas para que se familiarice con el uso de la tabla:

Z	Área entre μ y z
1.00	
1.50	
2.13	
2.77	
−1.00	
−1.50	
−1.25	
4.00	

Una vez dominado el uso de la tabla pasemos al uso que tiene la misma en problemas reales.

Ahora sólo nos resta realizar ejercicios prácticos para que el estudiante domine perfectamente el cálculo de probabilidades para una muestra distribuida normalmente utilizando la tabla Z.

También es importante mencionar el tipo de notación que se utilizará cuando estemos calculando probabilidades y la forma en que se tiene que leer cuando se usa para calcular probabilidades de valores reales (no estandarizados) o valores estandarizados:

No estandarizada	Se lee
$P(a<x<b)$	La probabilidad de que x sea mayor que a pero menor que b
$P(x>a)$	La probabilidad que x sea mayor que a
$P(x<a)$	La probabilidad que x sea menor que a

Estandarizada	
$P(a<z<b)$	La probabilidad de que un valor z sea mayor que a pero menor que b
$P(z>a)$	La probabilidad que z sea mayor que a
$P(z<a)$	La probabilidad que z sea menor que a

Finalmente vale la pena anotar algunos pasos que el estudiante debe recordar al resolver un problema de probabilidad con muestras de tipo normal.

a. Dibuje una curva normal, rotule la media y cualquier puntaje perti nente y sombree la región que represente la probabilidad deseada.
b. Para cualquier valor de *x* que sea frontera de la región sombreada use la fórmula para transformarlo en un valor z.
c. Remítase a la tabla Z para obtener el área de la región sombreada. Esta área es la probabilidad deseada.

Veamos un ejemplo en donde se consideren la mayoría de casos con los que se puede encontrar un estudiante al trabajar en el cálculo de probabilidades de tipo normal, y después ya se pueden resolver todos los demás ejercicios:

1. La estatura de las mujeres de Estados Unidos tiene una distribución normal con una media de 63.6 pulgadas y una desviación estándar de 2.5 pulgadas, basado en datos de la encuesta nacional de salud de ese país, si escogemos al azar a una mujer, determine la probabilidad de:

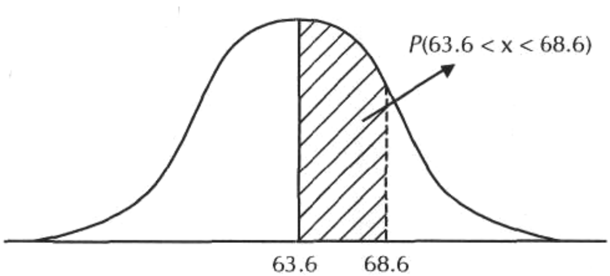
   a. Que su estatura esté entre 63.6 pulgadas y 68.6 pulgadas
   b. Que su estatura sea mayor de 68 pulgadas
   c. Que su estatura sea menor a 62 pulgadas
   d. Que su estatura esté entre 62 y 64.5 pulgadas
   e. Que su estatura sea mayor de 61.5 pulgadas

Respuesta:

a. Que su estatura esté entre 63.6 pulgadas y 68.6 pulgadas

Paso 1. La notación correspondiente que debemos utilizar es: P(63.6 < *x* < 68.6). Para valores reales o no estandarizados se debe leer: La probabilidad de que x, la estatura de las mujeres sea mayor que 63.6, pero menor que 68.6.

Paso 2. Dibujaremos una curva de distribución normal, considerando los valores reales, para darnos cuenta gráficamente dónde se encuentra el área de la cual queremos conocer su probabilidad. Recordemos que la información con la que contamos es: *i* - 63.6 *y a* - 2.5 pulgadas, entonces el área será:



Los valores mayores a 63.6 se encuentran a la derecha de la curva pero existe un límite que se refiere a los valores menores que 68.6 y ésos se encuentran a la izquierda de la línea punteada, por tal razón, el área de la cual queremos conocer su probabilidad es la que se encuentra sombreada.

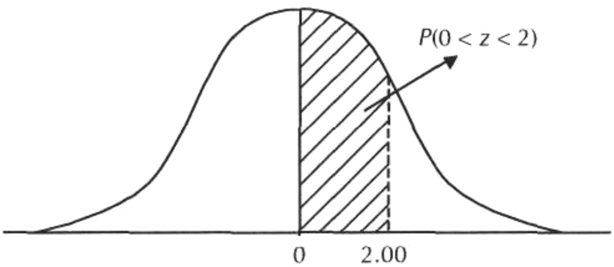
Paso 3. Ahora bien, tenemos que estandarizar los valores reales, es decir, transformarlos en valores *z,* aplicando la fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow$$

$$z_1 = \frac{63.6 - 63.6}{2.5} = 0$$

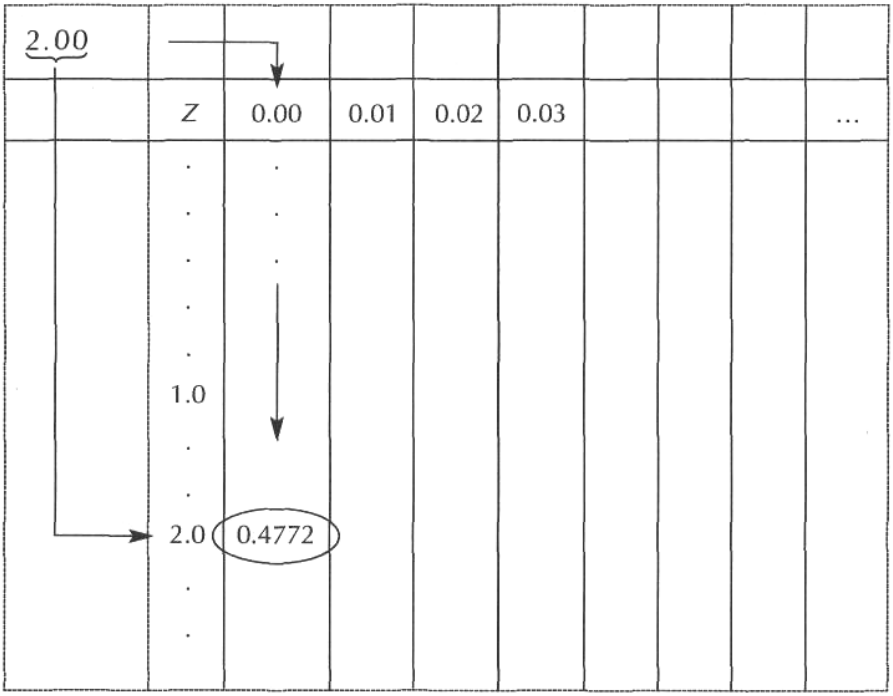
$$z_2 = \frac{68.6 - 63.6}{2.5} = \frac{5}{2.5} = 2$$

Una vez estandarizados los valores podemos visualizar gráficamente el área de la cual queremos conocer su probabilidad, recuérdese que esta nueva gráfica está hecha con los valores *z.*



Esta distribución ya se encuentra estandarizada, así que observe con atención que los datos ya cambiaron aunque el área sigue siendo la misma.

Paso 4. Busquemos el área bajo la curva que queremos utilizando la tabla de distribución normal (véase tabla 5, en el apéndice). Recuerde que la tabla nos proporciona el área bajo la curva de la media hacia la derecha hasta el valor requerido, en nuestro caso necesitamos conocer la probabilidad del área bajo la curva de 0 a 2, así que, utilizando la tabla, busquemos el valor de 2.00. Reproducimos la parte de la tabla que nos interesa para que el estudiante vea con claridad cómo encontrar el valor, pero se debe ir a la tabla 5 y corroborar esta información:



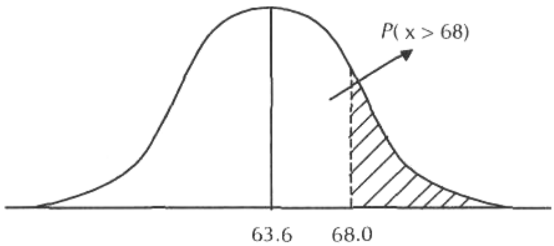
Paso 5. Interpretación: sólo nos resta aclarar que la probabilidad de que al seleccionar una mujer al azar de las miles de USA su altura sea mayor a 63.6 pulgadas y menor a 68.6, es de 0.4772 « 0.48, es decir, 48%, también podríamos referir que de cada 100 mujeres existe la probabilidad de que 48 tengan una altura que se encuentre entre las 63.6 y 68.6 pulgadas de altura.

Continuaremos con los siguientes incisos.

b. Que su estatura sea mayor de 68 pulgadas

Paso 1. La notación correspondiente que debemos utilizar es: P(x> 68") (para valores reales o no estandarizados), se debe leer: La probabilidad de que x (la estatura de las mujeres) sea mayor a 68 pulgadas.

Paso 2. Dibujaremos una curva de distribución normal, considerando los valores reales, para darnos cuenta, gráficamente, dónde se encuentra el área de la cual queremos conocer su probabilidad. Recordemos que la información con la que contamos es: $\mu = 63.6$ y $\sigma = 2.5$ pulgadas, entonces el área será:

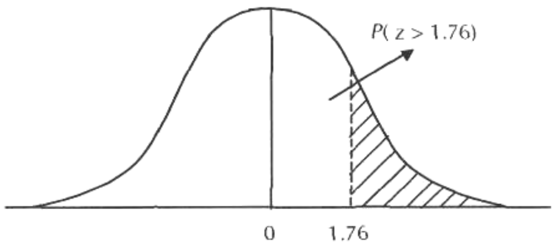


Los valores mayores a 68 pulgadas se encuentran a la derecha de la curva punteada, por tal razón, el área de la cual queremos conocer su probabilidad es la que se encuentra sombreada.

Paso 3. Ahora, tenemos que estandarizar los valores reales, es decir, transformarlos en valores *z,* aplicando la fórmula:

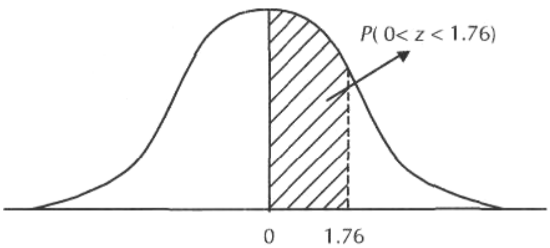
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{68 - 63.6}{2.5} = \frac{4.4}{2.5} = 1.76$$

Una vez estandarizados los valores podemos visualizar, gráficamente, el área de la cual queremos conocer su probabilidad (recuérdese que esta nueva gráfica es con los valores z).



Esta distribución ya se encuentra estandarizada, así que observe con atención que los datos ya cambiaron aunque el área sigue siendo la misma.

Paso 4. Busquemos el área bajo la curva que queremos utilizando la tabla de distribución normal (véase tabla 5, en el apéndice). Recuerde que la tabla nos proporciona el área bajo la curva de la media hacia la derecha, en este caso, cuando busquemos el valor de la probabilidad para 1.76, el área que encontraremos es la del cero hasta el valor de 1.76, veamos gráficamente esto:



La probabilidad de $0 < z < 1.76$ es P $(0 < z < 1.76) = 0.4608$ (revisar en las tablas), para conocer el valor de la probabilidad que estamos buscando, es decir, la parte de la derecha del área que ya encontramos, tenemos que utilizar algo que se conoce como el complemento, y como ya se mencionó anteriormente, el área bajo la curva de una distribución normal es de 100% o 1.0, si la dividimos en 2, ya que la distribución es simétrica, tenemos 50% en cada lado o 0.50; con lo anterior ya sabemos que de cada lado hay 0.50, y aplicando una resta podemos calcular el área que queremos, entonces decimos:

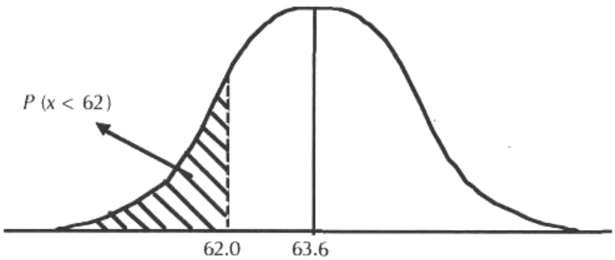
$$P(x > 68) = P(z > 1.76) = 0.50 - 0.4608 = 0.0392 \approx 0.04 \text{ ª } 4\%$$

Paso 5. Interpretación: la probabilidad de que al seleccionar una mujer al azar su altura sea mayor a 68 pulgadas es de 4%, también podríamos decir que, de cada 100 mujeres, existe la probabilidad de que cuatro tengan una altura que sea mayor a 68 pulgadas.

c. Que su *estatura sea menor a 62 pulgadas*

Paso 1. La notación correspondiente que debemos utilizar es: $P(x < 62)$, para valores reales o no estandarizados se debe leer: la probabilidad de que *x,* la estatura de las mujeres, sea menor a 62 pulgadas.

Paso 2. Dibujaremos una curva de distribución normal, considerando los valores reales, para darnos cuenta gráficamente, dónde se encuentra el área de la cual queremos conocer su probabilidad. Recordemos que la información con la que contamos es: $\mu = 63.6$ y $\sigma = 2.5$ pulgadas, entonces el área será:

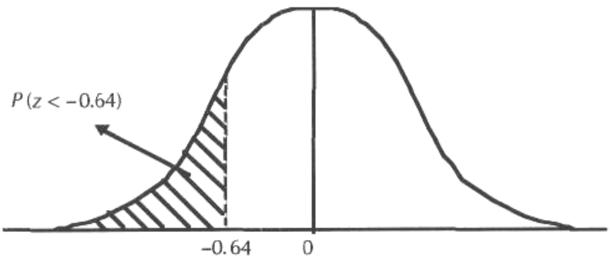


Los valores menores a 62 pulgadas se encuentran a la izquierda de la curva punteada, por tal razón el área de la cual queremos conocer su probabilidad es la que se encuentra sombreada.

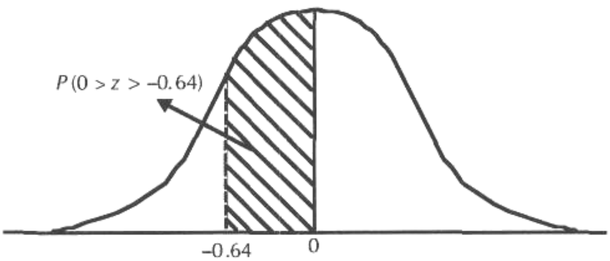
Paso 3. Ahora bien, tenemos que estandarizar los valores reales, es decir, transformarlos en valores z, aplicando la fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{62 - 63.6}{2.5} = \frac{1.6}{2.5} = -0.64$$

Una vez estandarizados los valores podemos visualizar gráficamente el área de la cual queremos conocer su probabilidad, el valor es negativo, lo cual índica que se encuentra a la izquierda de la distribución normal.



Paso 4. Busquemos el área bajo la curva que queremos, utilizando la tabla de distribución normal (véase tabla 5, en el apéndice). Recuerde que la tabla nos proporciona el área bajo la curva de la media hacia la derecha, en este caso, cuando busquemos el valor de la probabilidad para -0.64, lo que debemos hacer es tomar el valor absoluto y buscar su probabilidad en la tabla, y como ya sabemos que es simétrica el valor es el mismo. Veamos gráficamente esto:



La probabilidad de $0 > z > -0.64$ es $P(0 > z > -0.64) = 0.2389$ (es importante decir que la probabilidad siempre es un valor positivo, el valor negativo que pueda tomar un dato al transformarlo en valor z, sólo nos sirve para ubicarlo dentro de la curva), para conocer el valor de la probabilidad que estamos buscando, es decir, la parte de la izquierda del área que ya encontramos, tenemos que utilizar el complemento de nuevo, ya sabemos que cada lado tiene 0.50, y aplicando una resta podemos calcular el área que queremos, entonces decimos:

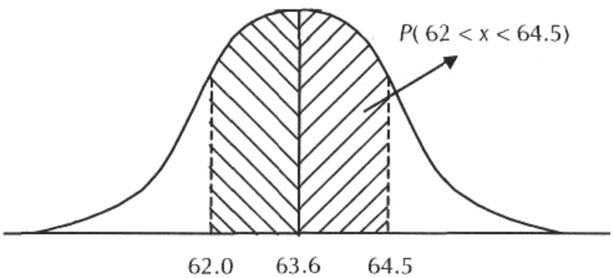
$$P(x < 62) = P(z < -0.64) = 0.50 - 0.2389 = 0.2611 \approx 0.26 \approx 26\%$$

Paso 5. Interpretación: la probabilidad de que al seleccionar una mujer al azar, su altura sea menor a 62 pulgadas es de 26%, o bien, que de cada 100 mujeres existe la probabilidad de que 26 tengan una altura que sea menor a 62 pulgadas.

d. Que su estatura esté entre 62 y 64.5 pulgadas

Paso 1. La notación correspondiente que debemos utilizar es: $P(62 < x < 64.5)$, para valores reales o no estandarizados se debe leer: la probabilidad de que *x,* la estatura de las mujeres, sea mayor a 62 y menor a 64.5 pulgadas.

Paso 2. Dibujaremos una curva de distribución normal, considerando los valores reales para darnos cuenta, gráficamente, dónde se encuentra el área de la cual queremos conocer su probabilidad. Recordemos que la información con la que contamos es \i = 63.6 y *o* = 2.5 pulgadas, entonces el área será:



Los valores mayores a 62 pulgadas se encuentran a la derecha de la curva punteada y los valores menores a 64.5 pulgadas se encuentran a la izquierda de la línea punteada, por tal razón, el área de la cual queremos conocer su probabilidad es la que se encuentra sombreada.

Paso 3. Ahora bien, tenemos que estandarizar los valores reales, es decir, transformarlos en valores z, aplicando la fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow$$

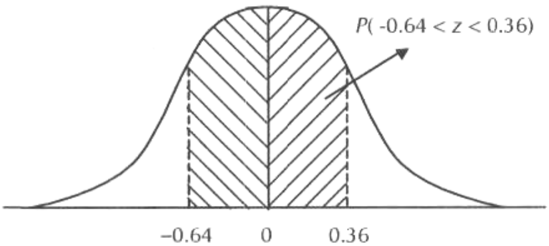
$$z_1 = \frac{62 - 63.6}{2.5} = \frac{1.6}{2.5}$$

$$z_1 = -0.64$$

$$z_2 = \frac{64.5 - 63.6}{2.5} = \frac{0.9}{2.5}$$

$$z_2 = 0.36$$

Una vez estandarizados los valores podemos visualizar, gráficamente, el área de la cual queremos conocer su probabilidad.



Paso 4. Busquemos el área bajo la curva que queremos, utilizando la tabla de distribución normal (véase tabla 5, en el apéndice). Recuerde que la tabla nos proporciona el área bajo la curva de la media hacia la derecha, o hacia la izquierda usando el valor absoluto, en este caso necesitamos conocer la probabilidad de dos partes de la curva, así que para este tipo de situaciones se requiere encontrar la probabilidad de cada valor y después realizar la suma de ambas, entonces:

P (62 < x < 64.5) = P (-0.64 < *z* < 0.36) - 0.2389 + 0.1406 = 0.3795 «0.38 «38%

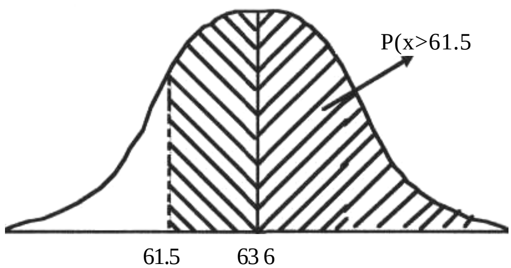
Paso 5. Interpretación: la probabilidad de que al seleccionar una mujer al azar su altura sea mayor a 62 pulgadas y menor a 64.5 pulgadas es de

38%, también podríamos decir que, de cada 100 mujeres, existe la probabilidad de que 38 tengan una altura entre 62 y 64.5 pulgadas.

e. Que *su estatura sea mayor de 61.5 pulgadas*

Paso 7. La notación correspondiente que debemos utilizar es: P (x > 61.5), para valores reales o no estandarizados se debe leer: la probabilidad de que x (la estatura de las mujeres) sea mayor á 61.5 pulgadas.

Paso 2. Dibujaremos una curva de distribución normal considerando los valores reales para darnos cuenta, gráficamente, dónde se encuentra el área de la cual queremos conocer su probabilidad. Recordemos que la información con la que contamos es: \i - 63.6 y o = 2.5 pulgadas, entonces el área será:



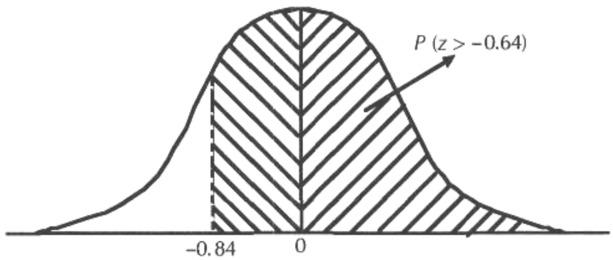
Los valores mayores a 61.5 pulgadas se encuentran a la derecha de la curva punteada, por tal razón el área de la cual queremos conocer su probabilidad es la que se encuentra sombreada.

Paso 3. Ahora bien, tenemos que estandarizar los valores reales, es decir, transformarlos en valores z, aplicando la fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow$$

$$z_1 = \frac{61.5 - 63.6}{2.5} = \frac{-2.1}{2.5} = -0.84$$

Una vez estandarizados los valores podemos visualizar gráficamente el área de la cual queremos conocer su probabilidad.



Paso 4. Busquemos el área bajo la curva que queremos, utilizando la tabla de distribución normal (véase tabla 5, en el apéndice). Recuerde que la tabla nos proporciona el área bajo la curva de la media hacia la derecha o hacia la izquierda usando el valor absoluto, en este caso necesitamos conocer la probabilidad de dos partes de la curva, pero la parte derecha es completa, así que para este tipo de situaciones ya sabemos que el área bajo la curva de la mitad es el 0.50, entonces, sólo tenemos que conocer la probabilidad del área bajo la curva de 0 a -0.84; en la tabla este valor se corresponde con una probabilidad de 0.2995, así que para saber la probabilidad total tenemos que sumar 0.50 de la parte derecha:

$P\ (x > 61.5) = P(z > -0.84) = 0.2995 + 0.5000 = 0.7995$ « 0.80 » 80%

Paso 5. Interpretación: la probabilidad de que al seleccionar una mujer al azar su altura sea mayor a 61.5 pulgadas es de 80%; también podríamos decir que de cada 100 mujeres, existe la probabilidad de que 80 tengan una altura mayor a 61.5 pulgadas.

Ejercicios (5.3.1):

1. Un clásico de la distribución normal se inspiró en una carta enviada a una consejera sentimental en la que una esposa aseguraba haber dado a luz 308 días después de una breve visita de su esposo, el cual servía

en la Armada de México. Las duraciones de los embarazos tienen una distribución normal con una media de 268 días y una desviación estándar de 15 días. Dada esta información, determine la probabilidad de que un embarazo dure 308 días o más, ¿qué sugiere el resultado?

2. Utilizando los datos del ejercicio anterior. Si estipulamos que un bebé es prematuro si nace al menos tres semanas antes de lo debi do, ¿qué porcentaje de bebés nacen prematuramente?
3. Trace una curva normal, sombree el área deseada y obtenga la infor mación requerida a continuación:

   a. Encuentre el área a la derecha de z = 1.0
   b. Obtenga el área a la izquierda *de z* - 1.0
   c. Calcule el área a la derecha de *z* = -0.34
   d. Determine el área entre *z* = 0 y z = 1.5
   e. Halle el área entre *z* - 0 y z = -3.88
   f. Encuentre el área entre *z* - -0.56 y z = -0.20

4. Encuentre los valores de z que producirán las siguientes áreas:

   a. El *área* a la izquierda de z es 0.0505
   b. El área a la izquierda de z es 0.0228
   c. El área a la derecha de z es 0.0228
   d. El área entre 0 y z es 0.4772
   e. El área de la derecha de z es 0.5000

5. Suponga que el ingreso promedio de una gran comunidad se aproxi ma razonablemente mediante una distribución normal que tiene una media de $15 000 pesos y una desviación estándar de $3 000 pesos.

   a. ¿Qué porcentaje de la población tendrá ingresos superiores a $ 18 600 pesos?
   b. En una muestra aleatoria de 50 empleados, ¿alrededor de cuán tas personas se puede esperar que tengan ingresos menores de $10 500 pesos?

6. Los tiempos de reemplazo para los televisores tienen una distribución normal con una media de 8.2 años y una desviación estándar de 1.1 años. Determine la probabilidad de que un televisor seleccionado al azar tenga un tiempo de reemplazo de menos de 7.0 años. Si toma mos una muestra de 10 televisores al azar, cuántos de ellos tienen la probabilidad de descomponerse en un periodo de seis años.
7. Los tiempos de reemplazo de los reproductores de CD tienen una distribución normal con una media de 7.1 años y una desviación estándar de 1.4 años. Determine la probabilidad de que un repro ductor de CD seleccionado al azar tenga un tiempo de reemplazo de menos de 8.0 años.
8. Suponga que los pesos de la basura desechada por los hogares cada semana están normalmente distribuidos con una media de 9.4 kilos y una desviación estándar de 4.2 kilos. Determine la probabilidad de seleccionar aleatoriamente un hogar y obtener uno que desecha entre 5.0 y 8.0 kilos de basura en una semana.
9. Según la opinión de una empresa productora de tinas de baño, los hombres pasan en promedio 11.4 minutos en la ducha. Suponga que los tiempos están distribuidos normalmente con una desviación estándar de 1.8 minutos. Si se escoge al azar un hombre, determine la probabilidad de que pase al menos 10.0 minutos en la ducha.
10. Los puntajes de cociente intelectual (IQ) están distribuidos normal mente con una media de 100 puntos y una desviación estándar de 15 puntos. "Personas sobresalientes" es una organización para per sonas con cociente intelectual elevado, y sólo acepta personas con un IQ mayor que 131.5.

    a. Si se escoge aleatoriamente a una persona, determine la proba bilidad de que satisfaga el requisito de la empresa.
    b. En una región representativa con 75 000 habitantes, ¿cuántos son elegibles para la empresa "personas sobresalientes"?

5.4 DISTRIBUCIÓN "T DE STUDENT"

En el estudio de la distribución normal podemos ver que siempre trabajamos con muestras de un tamaño grande, por grande debemos entender mayores a 30 observaciones, y una desviación estándar conocida. Pero existen en la realidad problemas en donde ni el tamaño de la muestra es tan grande, ni tampoco es posible conocer el valor de la desviación estándar poblacional.

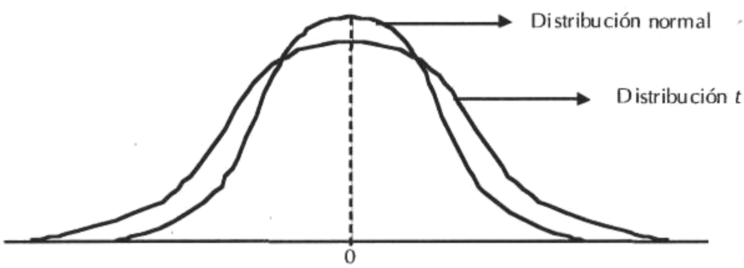
Afortunadamente, existe una distribución que se utiliza en estos casos y se le conoce en estadística como "distribución *t* de Student".

Los orígenes de la distribución *t* se encuentran en unos trabajos realizados por W.S. Gossett (1876-1937), quien era empleado de la cervecería Guinness Brewery en Dublín, Irlanda, y necesitaba una distribución que pudiera ser utilizada con muestras pequeñas, la empresa no permitía que los empleados publicaran resultados de investigaciones con su propio nombre. De modo que Gossett adoptó el seudónimo de Student para publicar los resultados de sus hallazgos de investigación (1908).

A Gossett le interesaba el comportamiento exacto de la expresión:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Cuando s debía usarse como estimador de a. En particular le preocupaba la discrepancia entre s y a cuando se calculaba s a partir de una muestra muy pequeña. La distribución íy la distribución normal estándar se presentan gráficamente en el siguiente diagrama:



Observe que, en particular, la distribución es menos alta y más extendida que la distribución normal.

Las siguientes características de la distribución í se basan en el supuesto de que la población de interés es normal o casi normal, sólo que la muestra es pequeña y se desconoce el valor de a:

a. Como la distribución z, es una distribución continua.
b. También es acampanada y simétrica.
c. No existe una sola distribución *t,* sino una familia de distribu ciones f. Todas tienen la misma media igual a cero, pero sus des viaciones estándar difieren de acuerdo con el tamaño de la muestra *n.* Hay una distribución *t* para cada tamaño de muestra.
d. La distribución í es más extendida y menos puntiaguda en el centro que la distribución normal estándar (refleja la mayor variabilidad que cabe esperar cuando la muestra es pequeña). Sin embargo, a medida que aumenta el tamaño de la muestra, la curva de la distribución f se aproxima a la de la distribución normal estándar.

Una vez que hemos resaltado los orígenes y las características más importantes de la distribución í, cabe aclarar que ésta se utiliza básicamente para estimaciones de valores de la media poblacional y también para formar intervalos de confianza, pero esos temas quedan fuera de los límites de este curso, así que dejaremos la exposición del tema en esta parte para que el estudiante retome la definición en su siguiente curso de estadística.

Cabe agregar que también existe una tabla que nos proporciona los valores de áreas bajo la curva en distribuciones del tipo *t,* pero su utilización requiere del conocimiento de algunos otros temas que también escapan al interés del curso.

6. NÚMEROS ÍNDICES

La verdadera, sabiduría está en
reconocer la propia ignorancia.

SÓCRATES

Objetivos:

Al finalizar el capítulo el alumno será capaz de:

- Calcular, interpretar y aplicar los números índices simples y compuestos de precio, cantidad y de valor.
- Calcular, interpretar y aplicar los números índices ponderados.
- Deflactar series de valores.
- Comprender los números índices, canasta básica y poder de compra.

6.1 DEFINICIÓN Y EMPLEO DE LOS NÚMEROS ÍNDICES

Definición: Un número índice es una razón que se utiliza para medir los cambios relativos que ocurren en cantidades, precios o valores de una mercancía en uno o varios periodos. Por ejemplo, cuando una ama de casa observa que un pan que le gusta consumir cuesta el doble que hace 10 años, en realidad está utilizando un tipo de número índice, aunque no lo alcance a comprender.

6.1.1 *Empleo de los números índices*

El empleo de los números índices, en economía, es muy importante, ya que indican los cambios que sufren las mercancías en cuanto a sus precios, cantidades o valores a través del tiempo. Algunos de los índices más conocidos son: el índice de precios al consumidor, y el índice de precios al productor, etcétera.

Los números índices también son utilizados para indicar periodos de inflación, recesión, ciclos comerciales y estancamientos en el sistema económico.

Los negocios y las industrias también enfrentan situaciones en las que se requieren, de alguna forma, la utilización de algunos índices, ya que experimentan cambios en los precios y cantidades de las materias primas, productos semiacabados, refacciones, suministros, mano de obra, combustibles y ventas, y en estos casos los números índices les ofrecen una alternativa para medir tales cambios.

En la actualidad se han vuelto tan importantes los números índices que existen diferentes instituciones públicas y privadas que se dedican a producirlos (bancos, casas de bolsa, consultarías, Banco de México, Nacional Financiera, etc.), y tanto el sector público como el privado los utilizan para el cálculo de sus estimaciones, también las diferentes universidades recurren a ellos para la realización de investigaciones y estudios.

6.2 TIPOS DE NÚMEROS ÍNDICES

Existen tres clasificaciones de los números índices utilizados en economía: de precios, de cantidad y de valor.

Cuando el índice se aplica a un solo producto o mercancía, es decir, para calcular el cambio en el precio, la cantidad o valor, el índice recibe el nombre de índice simple; cuando se aplica a un grupo de elementos recibe el nombre de índice compuesto, es decir, pueden existir índices simples o compuestos de precios, cantidad y de valor. Pasemos al estudio de cómo se construyen estos índices.

6.3 CONSTRUCCIÓN DE NÚMEROS ÍNDICES: SIMPLES Y COMPUESTOS (AGREGADOS)

6.3.1 Números índices simples

Un número índice simple mide el cambio relativo que ocurre en cantidad, precio o valor de un solo bien o mercancía: se calcula como la razón de precio, cantidad o valor en un periodo dado con respecto al precio, cantidad o valor correspondientes en un periodo tomado como base.

Los números índices simples para el precio, cantidad y valor relativos se pueden calcular mediante las siguientes fórmulas:

$$Precio\ relativo = \left(\frac{P_n}{P_0}\right) x\ 100 \qquad I_p^{(t)} = \left(\frac{P_i^{(t)}}{P_0^{(0)}}\right) x\ 100$$

$$Cantidad\ relativa = \left(\frac{q_n}{q_0}\right) x\ 100 \qquad I_c^{(t)} = \left(\frac{q_i^{(t)}}{q_0^{(0)}}\right) x\ 100$$

$$Valor\ relativo = \left(\frac{P_n \quad q_n}{P_0 \quad q_0}\right) x\ 100 \qquad I_v^{(t)} = \left(\frac{P_i^{(t)} \quad q_i^{(t)}}{P_0^{(0)} \quad q_0^{(0)}}\right) x\ 100$$

P_0 = Precio del bien en el año base
q_0 = Cantidad de un bien en el año base
Pn = Precio del bien en determinado año
qn = Cantidad de un bien en determinado año
$i = 1, 2, 3, \ldots$

Donde:

Ejemplo: considere el precio y volumen promedio en el caso de un vendedor de automóviles nuevos a escala en lo referente a un tipo de modelo específico con el equipo estándar de fábrica. Los datos son los siguientes:

Datos de volumen y precio para vendedores de autos

Año	Precio prom. de venta	Núm. de autos vendidos	Ingresos (miles)
1992	3 000.00	60	180.00
1993	3 300.00	63	207.90
1994	3 900.00	60	234.00
1995	4 500.00	66	297.00
1996	4 500.00	72	324.00
1997	4 800.00	75	336.00
1998	4 950.00	66	326.70

a. Calcule los números índices para el precio, cantidad y valor del año 1996, tomando como año base 1992.

Respuesta:

Esto significa que deberá considerarse el precio de los autos de 1992 que es de $3 000.00 pesos como equivalente a 100% y que los precios de otros años deberán medirse en relación con ese precio. En forma similar, el volumen de ventas se medirá utilizando el volumen de ventas del año base que es 60 unidades vendidas, como 100% y los ingresos se medirán utilizando como base a $180 000.00 como el 100 por ciento.

Pasemos al cálculo:

a. Los números índices simples o relativos, para precio, cantidad y valor de los automóviles del año de 1996 con respecto a 1992 son:

$$I_p = \left(\frac{P_{1996}}{P_{1992}}\right) x\ 100 = \left(\frac{4,500}{3,000}\right) x\ 100 = 150$$

$$I_c = \left(\frac{q_{1996}}{q_{1992}}\right) x\ 100 = \left(\frac{72}{60}\right) x\ 100 = 120$$

$$I_v = \left(\frac{P_{1996}\ \ q_{1996}}{P_{1992}\ \ q_{1992}}\right) x\ 100 = \left(\frac{(4,500)(72)}{(3,000)(60)}\right) x\ 100 = 180$$

$$\therefore \quad I_p = 150 \quad ; \quad I_c = 120; \quad I_v = 180$$

Interpretación de los índices:

El índice de precios nos indica que los precios de los automóviles aumentaron 50% entre 1992 y 1996.

El índice de cantidad nos indica que el total de automóviles vendidos aumentaron en 20% de 1992 a 1996.

El índice de valor nos dice que el valor de los automóviles aumentó 80% de 1992 a 1996. Otra forma sería decir que los ingresos por las ventas de automóviles aumentaron en 80% de 1992 a 1996.

Ejemplo: calcular los índices de precio, cantidad y valor para todos los años, tomando como base el año de 1992.

Respuesta: índices de precio, cantidad y valor para el ejemplo de los automóviles, utilizando las cifras de 1992 como base.

	Precio		Cantidad		Ingresos	
Año	Pesos	índice	Unidades	índice	Pesos	índice
1992	3 000.00		60		180.00	
1993	3 300.00		63		207.90	
1994	3 900.00		60		234.00	
1995	4 500.00		66		297.00	
1996	4 500.00		72		324.00	
1997	4 800.00		75		336.00	
1998	4 950.00		66		326.70	

Por último, los números índices simples que utilizan un periodo base común reciben el nombre de *relativos de base fija.*

6.3.2 Números índices relativos de enlace

Este tipo de índices concentran la atención en los cambios relativos que se dan de un año a otro; cada precio, cantidad o valor anual se mide como una razón con respecto al año anterior. Los índices relativos enlazados se pueden calcular directamente, utilizando datos no procesados, o bien, se pueden determinar a partir de números índices de base fija si se dispone de ellos. Estos índices relativos también se expresan en términos de porcentaje.

Ejemplo: calcular el índice relativo de enlace para la cantidad del año de 1996.

Respuesta: se puede calcular de dos formas:

Mediante el uso de datos no procesados o brutos:

$$I_{rec_{1996}} = \left(\frac{q_{1996}}{q_{1995}}\right) x\ 100 = \left(\frac{72}{66}\right) x\ 100 = 109$$

Mediante los índices para 1995 y 1996

$$I_{rec_{1996}} = \left(\frac{I_{c1996}}{I_{c1995}}\right) x\ 100 = \left(\frac{120}{110}\right) x\ 100 = 109$$

Interpretación: una expresión relativa siempre nos índica cuánto representa una cantidad con respecto a otra, en economía también se dice que refleja cuánto cambió una cantidad con respecto a otra de un periodo a otro. En este caso podemos decir que el índice relativo de cantidad nos refleja cuánto varió la cantidad de automóviles de un año a otro a lo largo de todo el periodo. En este ejemplo podemos decir que la cantidad de automóviles aumentó 9% de 1995 a 1996.

Nota: En el ejemplo pasado se calculó el aumento con respecto a 1992 y todos los índices se calcularon con respecto a este año base. En el caso de los índices relativos se calculan de acuerdo con el año inmediato anterior.

Ejercicio (6.3.1): calcular los índices relativos y de enlace de precios, cantidad y valor (ingreso) del ejemplo anterior.

La principal limitación que presentan los índices relativos simples consiste en que sólo se refiere a los elementos individuales, en tanto que, a menudo, es deseable poder resumir cambios con base en un grupo completo de elementos.

Es decir, el consumo de una persona no se basa en un solo producto únicamente. Para estos casos existen los números índices para grupos de valores que reciben el nombre de números índices compuestos y son los que veremos a continuación.

6.3.3 Números índices compuestos o agregados

Los números índices compuestos se utilizan para indicar el cambio relativo en precios, cantidad o valor de un grupo de elementos o mercancías. Por ejemplo, usted podría preguntarse si, en general, los precios de los comestibles se han elevado o reducido durante un periodo dado. Sin duda, muchos precios se han elevado pero otros se han reducido. ¿Qué puede decirse en términos globales? Para saber la respuesta es necesario examinar una combinación de artículos en lugar de considerarlos de manera aislada.

A continuación se consideran algunos métodos para obtener números índices compuestos o agregados.

Agregados (simples): Este tipo de índices es poco empleado en la práctica y en los libros es poco tratado, pero para fines escolares tiene que ser explicado.

Los índices agregados simples se calculan para precios, cantidad y valor, las fórmulas que se utilizan son las siguientes:

$$I_{p(as)} = \left(\frac{\sum p_n}{\sum p_0}\right) x\ 100 \quad ;$$

$$I_{c(as)} = \left(\frac{\sum q_n}{\sum q_0}\right) x\ 100 \quad ;$$

$$I_{v(as)} = \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0}\right) x\ 100$$

Veamos un ejemplo: Utilizando los datos de las compras de un consumidor en los años de 1990 y 1998, calcular los respectivos índices agregados simples de precios, cantidades y valores.

Datos de las compras de un consumidor				
	1990		1998	
Productos	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
Jamón	0.80	2	1.20	1.5
Tortillas	0.10	4	0.08	6.0
Pan	1.00	1	2.00	0.5
Periódico	0.10	1	0.25	1.0

Respuesta:

$$I_{p(as)} = \left(\frac{\sum p_n}{\sum p_0}\right) x \ 100 =$$

$$\left(\frac{1.20 + 0.08 + 2.00 + 0.25}{0.80 + 0.10 + 1.00 + 0.10}\right) x \quad 100 = \frac{3.53}{2} = 176.5$$

$$I_{c(as)} = \left(\frac{\sum q_n}{\sum q_0}\right) x \ 100 =$$

$$\left(\frac{1.50 + 6.00 + 0.50 + 1.00}{2.00 + 4.00 + 1.00 + 1.00}\right) x \quad 100 = \frac{9}{8} = 112.5$$

$$I_{v(as)} = \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0}\right) x \ 100 =$$

$$\left(\frac{(1.20)(1.5) + (0.08)(6.0) + (2.0)(0.5) + (0.25)(1.0)}{(0.80)(2.0) + (0.10)(4.0) + (1.0)(1.0) + (0.10)(1.0)}\right) x \quad 100 = 114$$

En la práctica no se utilizan este tipo de índices ya que son muy similares a los índices simples, además, no proporcionan muchos elementos de análisis, a excepción de índice de valor que tiene incluidas las diferentes cantidades que permiten ponderar de alguna manera el índice, como veremos a continuación.

Un índice agregado simple representa los cambios en precios, cantidades o valores en el transcurso del tiempo para todo un grupo de artículos. Un índice así, aunque es fácil de calcular, tiene dos claras desventajas sin considerar al índice de valor que no presenta estas desventajas. Primera: El índice considera igualmente importante cada artículo del grupo y, por consiguiente, permite que los artículos más caros por unidad tengan una influencia excesiva. Segunda: cualquier cambio en la unidad de medida de cualquier artículo altera el valor del índice, por ejemplo, el precio de algún bien puede expresarse en centavos por kilo, mientras el precio de los demás en libras.

índice agregado ponderado: Al igual que los índices agregados simples, los índices agregados ponderados se calculan para los precios, las cantidades y el valor de un conjunto de mercancías, lo interesante ahora es que, de alguna forma, para calcular cada uno de los índices se les agrega un valor que refleja la importancia que tiene cada bien en la canasta de consumo del individuo, es decir, se pondera.

Comencemos a comprender esto observando las fórmulas que se aplican para cada tipo de índice ponderado:

Índice de precios $$I_p = \left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0}\right) x\ 100$$

donde: q_0 denota las ponderaciones del año base

Índice de cantidad $$I_c = \left(\frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_0 q_0}\right) x\ 100$$

donde: P_o denota las ponderaciones del año base *índice de valor* $$I_v = \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0} \right) x\ 100$$

Veamos un ejemplo de cada uno: Tomando como base los mismos datos del ejemplo anterior, es decir, "los datos de las compras del consumidor", calcule el índice de precios, cantidad y valor ponderado.

Respuesta:

$$\text{índice de precios} = I_p = \left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0} \right) x\ 100 = \left(\frac{\sum p_{1998} q_{1990}}{\sum p_{1990} q_{1990}} \right) x\ 100$$

$$= \frac{(1.20)(2.0)+(0.08)(4.0)+(2.0)(1.0)+(0.25)(1.0)}{(0.80)(2.0)+(0.10)(4.0)+(1.0)(1.0)+(0.10)(1.0)}\ x\ 100 = 160$$

El índice de precios ponderado señala que, en conjunto, los precios para esta canasta de consumo han aumentado en 60% de 1990 a 1998, es decir, en 9 años.

$$\text{índice de cantidad} = I_c = \left(\frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_0 q_0} \right) x\ 100 = \left(\frac{\sum p_{1990} q_{1998}}{\sum p_{1990} q_{1990}} \right) x\ 100$$

$$= \frac{(1.5)(0.80)+(6.0)(0.10)+(0.5)(1.0)+(1.0)(0.10)}{(0.80)(2.0)+(0.10)(4.0)+(1.0)(1.0)+(0.10)(1.0)}\ x\ 100 = 77$$

Este índice se puede interpretar diciendo que las cantidades totales de los artículos adquiridos por el comprador disminuyeron en 23%, es decir, 100-77 = 23%.

$$\textit{índice de valor} = I_c = \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0}\right) x\ 100 = \left(\frac{\sum p_{1998} q_{1998}}{\sum p_{1990} q_{1990}}\right) x\ 100$$

$$= \frac{(1.2)(1.5)+(0.08)(6.0)+(2.0)(0.5)+(0.25)(1.0)}{(0.80)(2.0)+(0.10)(4.0)+(1.0)(1.0)+(0.10)(1.0)} x\ 100 = 114$$

Podemos decir que el valor de los bienes en conjunto aumento en 14%.

Observación: no es absolutamente necesario utilizar los precios o cantidades del año base como ponderaciones para dichos índices. Por ejemplo, algunas veces se usan las ponderaciones del año en curso. Sin embargo, la desventaja de dichas ponderaciones es que deben ser revisadas cada nuevo año.

Promedio de métodos relativos: Otro método que se emplea en la elaboración de números índices consiste en la obtención de los índices relativos con respecto al precio, cantidad y valor, en relación con un año base y una vez adquiridos se obtiene el promedio de ellos.

Promedio no ponderado del método de relativos^ También conocido como "método de media de relativos simples". Como su nombre lo indica, se trata de calcular el valor medio o promedio de los índices relativos de ciertos bienes, también se pueden deducir de una canasta de bienes.

---

[51] En la bibliografía consultada se limitan a tratar el caso del promedio de precios relativos, nunca tratan el promedio relativo de cantidad y valor, tal vez se pueden deducir fácilmente o peor aún, no tienen sentido económico. Habría que realizar este ejercicio. Sin embargo, en los libros sí hablan de sacar el promedio con base en la media aritmética, geométrica, armónica, mediana etc. Nosotros explicaremos únicamente la media aritmética y si algún alumno quisiera conocer más a fondo el tema lo remitiremos a Murria R. Spiegel *{op. cit).*

La fórmula para calcularlo sería:[52]

Promedio de índ $\sum\left(P_n/P_0\right)$ =s no $= \dfrac{\sum\left(P_n/P_0\right)}{n}$

Donde:

Suma de todos los precios relativos de los bienes

n = Número de precios relativos de bienes empleado.

Ejemplo: calcular el promedio de índice de precios de relativos simple para los datos de las compras de un consumidor en los años de 1990 y 1998.

Solución: los precios relativos son:

Precio relativo del jamón

$$= \frac{\text{precio del jamón en 1998}}{\text{precio del jamón en 1990}}\ x\ 100 = \frac{1.20}{0.80}\ x\ 100 = 150$$

Precio relativo de las tortillas

$$= \frac{\text{precio de las tortillas en 1998}}{\text{precio de las tortillas en 1990}}\ x\ 100 = \frac{0.08}{0.10}\ x\ 100 = 80$$

[52] Las fórmulas para los índices promedio de cantidad y de valor serían las siguientes (estas son deducciones a partir de la fórmula de índices promedio de precios):

$$I_{c\ (promedio)} = \frac{\sum\left(q_n/q_0\right)}{n}\ ;\ I_{v\ (promedio)} = \frac{\sum\left(p_n\,q_n/p_0 q_0\right)}{n}$$

Precio relativo del pan

$$= \frac{\text{precio del pan en 1998}}{\text{precio del pan en 1990}} \ x\ 100 = \frac{2.0}{1.0} \ x\ 100 = 200$$

Precio relativo del periódico

$$= \frac{\text{precio del periódico en 1998}}{\text{precio del periódico en 1990}} \ x\ 100 = \frac{0.25}{0.10} \ x\ 100 = 250$$

El promedio o la media de los precios relativos es:

$$\frac{\sum P_n/P_0}{n} = \frac{150+80+200+250}{4} = \frac{680}{4} = 170\%$$

Promedio ponderado del método de relativos: Este es un enfoque alternativo al método de agregados ponderados. Existen consideraciones de cálculo que influyen en la selección de los métodos para una situación dada. Al trabajar con datos publicados, algunas veces no se dispone de los precios y cantidades originales. En vez de ello se proporcionan los relativos que son los más utilizados.

Los índices de precio y cantidad correspondientes que utilizan relativos son los siguientes:

índice de precios (ponderaciones del año base):

$$I_p = \frac{\sum\left[\left(P_n/P_0\right)\left(P_0 q_0\right)\right]}{\sum P_0 q_0} \ x100$$

índice de cantidad (ponderaciones del año base):

$$I_c = \frac{\sum\left[\left(q_n/q_0\right)\left(P_0 q_0\right)\right]}{\sum P_0 q_0} x100$$

Ejemplo: calcular el índice de precios y de cantidad ponderados para el ejercicio de las compras de un consumidor.

Respuesta:

Índice de precios: $I_p = \frac{\sum\left[\left(P_{1998}/P_{1990}\right)\left(P_{1990}q_{1990}\right)\right]}{\sum P_{1990}q_{1990}} \; x\ 100$

$$I_p = \frac{(1.2/0.80)(0.80)(2.0)+(0.08/0.10)(0.10)(4.0)+(2.0/1.0)(1.0)(1.0)+(0.25/0.10)(0.10)(1.0)}{(0.80)(2.0)+(0.10)(4.0)+(1.0)(1.0)+(0.10)(1.0)} \; x\ 100$$

$$I_p = \frac{2.4+0.32+2.0+0.25}{1.6+0.4+1.0+0.1} x100 = \frac{4.97}{3.1} x100 = 160$$

Índice de cantidad: $I_c = \frac{\sum\left[\left(q_{1998}/q_{1990}\right)\left(P_{1990}q_{1990}\right)\right]}{\sum P_{1990}q_{1990}} \; x\ 100$

$$I_c = \frac{(1.5/2.0)(0.80)(2.0)+(6.0/4.0)(0.10)(4.0)+(0.5/1.0)(1.0)(1.0)+(1.0/1.0)(0.10)(1.0)}{(0.80)(2.0)+(0.10)(4.0)+(1.0)(1.0)+(0.10)(1.0)} \; x\ 100$$

$$I_c = \frac{1.2+0.6+0.5+0.10}{11.6+0.4+1.0+0.1} \; x\ 100 = \frac{2.4}{3.1} \; x\ 100 = 77$$

Nota: En la bibliografía consultada no se calcula el índice de valor promedio ponderado por alguna razón. Nosotros tratamos de descubrirla.

índice de valor (ponderaciones del año base)

$$I_v = \frac{\sum\left[\left(P_n q_n / P_0 q_0\right)\left(P_0 q_0\right)\right]}{\sum P_0 q_0} \times 100 = \frac{\sum\left[\left(\frac{P_n q_n}{P_0 q_0}\right)\left(P_0 q_0\right)\right]}{\sum P_0 q_0} = \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_0} \times 100$$

En la fórmula para el índice de valor promedio ponderado notamos que al sustituir los valores de los precios y las cantidades del año base se anulan y la fórmula queda idéntica a la de agregados sin ponderar.

Ejercicio (6.3.2): con base en la siguiente tabla del consumo de productos lácteos de un individuo.

Consumo de productos lácteos				
	1990		1998	
	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
Leche	1.20	2.0	1.80	1.5
Mantequilla	1.50	2.0	2.25	2.5
Queso	1.30	0.5	1.95	1.0

Calcule:

a. Los índices simples de precios, cantidad y valor.
b. Los índices agregados simples de precios, cantidad y valor.
c. Los índices agregados ponderados de precios, cantidad y valor.

6.4 NÚMEROS ÍNDICES DE LASPEYRES, PAASCHE Y FISHER

6.4.1 índice de Laspeyres

Este índice mide el cambio en términos de porcentaje en los precios que ocurriría en cualquier periodo dado si se hubieran comprado los mismos artículos y en las mismas cantidades en la realidad en un punto de referencia o periodo base seleccionado.

El índice de precios agregado de Laspeyres utiliza ponderaciones de cantidad del periodo base. La fórmula sería la siguiente:

$$I_{P(LA)} = \frac{\sum P_n \ q_0}{\sum P_0 \ q_0} \ x \ 100 \ ;$$

Existe otra notación más formalizada: $$I^{(t)}_{P(LA)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^{(t)} \ q_i^{(0)}}{\sum_{i=1}^{n} P_i^{(0)} \ q_i^{(0)}} \ x \ 100$$

Veamos un ejemplo de su aplicación: calculemos el índice de Laspeyres para el ejercicio del consumidor (6.3.2).

$$I_{P(LA)} = \frac{\sum P_n \ q_0}{\sum P_0 \ q_0} \ x \ 100$$

$$= \frac{(1.2)(2.0)+(0.08)(4.0)+(2.0)(1.0)+(0.25)(1.0)}{(0.80)(2.0)+(0.10)(4.0)+(1.0)(1.0)+(0.10)(1.0)} \ x \ 100$$

$$= \frac{2.4+0.32+2.0+0.25}{1.6+0.4+1.0+0.10} x \ 100 = \frac{4.97}{3.1} x \ 100 = 160$$

Interpretación económica: podemos decir que el costo de esta despensa básica de alimentos en 1998 era 60% mayor que el costo de estos artículos en 1990.

6.4.2 índice de Paasche

El índice de Paasche[53] usa las cantidades del año de referencia en lugar de las cantidades del año base como ponderaciones o pesos para el índice agregado ponderado.

La fórmula que utiliza es la siguiente:

$$I_{P(P)} = \frac{\sum P_n \; q_n}{\sum P_0 \; q_n} \; x \; 100$$

Veamos un ejemplo de su aplicación: calculemos el índice de Paasche para el ejercicio del consumidor.

$$I_{P(P)} = \frac{\sum P_n \; q_n}{\sum P_0 \; q_n} \; x \; 100$$

$$= \frac{(1.2)(1.5)+(0.08)(6)+(2.0)(0.5)+(0.25)(1.0)}{(0.80)(1.5)+(0.10)(6)+(1.0)(0.5)+(0.10)(1.0)} \; x \; 100$$

$$= \frac{1.8+0.48+1.0+0.25}{1.2+0.6+0.5+0.10} x \; 100 = \frac{3.53}{2.4} x \; 100 = 147$$

---

[53] Los índices de Raasche miden los cambios en términos de porcentaje en los precios que ocurrirían en cualquier periodo dado si se hubieran comprado los artículos en un periodo de referencia o base y en las mismas cantidades que en el periodo dado ahora.

Interpretación económica: este índice nos indica el cambio en los precios de la canasta básica de 1998 con respecto a 1990, si las cantidades de bienes comprados fueran las de 1998.

Existen algunos autores que mencionan que el índice de Laspeyres tiene una tendencia a sobreestimar los cambios de precios, mientras que el índice de Paasche tiende a subestimarlos y por lo tanto se creó un nuevo índice.

6.4.3 índice de Fisher

El índice de Fisher se calcula a partir de los índices de Laspeyres y de Pasche. En un esfuerzo por cancelar los sesgamientos de precios inherentes en los índices de Laspeyres y de Paasche, Fisher construyó un índice "ideal" que se refiere a la media geométrica de los dos índices anteriores.

La fórmula que se utiliza es la siguiente:

$$I_F = \sqrt{\left(I_{P(LA)}\right)\left(I_{P(P)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^{(t)} q_i^{(0)}}{\sum_{i=1}^{n} P_i^{(0)} q_i^{(0)}}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^{(t)} q_i^{(t)}}{\sum_{i=1}^{n} P_i^{(0)} q_i^{(t)}}\right)}$$

Ejemplo: calcule el índice de Fisher a partir de los índices de Laspeyres y Paasche (previamente calculados).

Respuesta:

$$I_F = \sqrt{\left(I_{P(LA)}\right)\left(I_{P(P)}\right)} = \sqrt{(160)\ (147)} = 153.36 \approx 153$$

Aunque el índice de precios de Fisher parece medir el índice de precios más preciso que el de Laspeyres o el de Paasche, se usa poco en la práctica. El índice de Laspeyres o alguna variante de éste es el más usado por los estadísticos.

Una de las limitaciones que tiene la aplicación del índice de Fisher es que requiere de un grupo de datos ajustados continuamente, es laborioso y cuesta mucho construirlo y asimismo, prohíbe una comparación directa de los movimientos de precios entre un periodo y otro.

Ejercicio (6.4.1): De la siguiente tabla calcular el índice de Laspeyres, Paasche y de Fisher.

Precios y cantidades consumidas de varios metales en México en los años de 1975 y 1984

	1975		**1984**	
Metales	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
Cobre	64.2	3 440.0	66.8	240.6
Plomo	21.5	1 144.0	25.6	710.0
Estaño	339.8	49.4	623.8	42.8
Zinc	39.0	1 068.0	48.6	558.0

6.5 Otros índices

6.5.1 El índice de Marshall-Edgeworth

El índice de Marshall-Edgeworth usa el método de agregación ponderada con año típico, en el que los pesos (ponderaciones) se toman como la media aritmética de las cantidades del año base y el año dado, es decir, $q_t = 1/2(q_0 + q_n)$, sustituido en la fórmula:

$\dfrac{\sum P_n q_t}{\sum P_0 q_t}$, significa que el índice Marshall-Edgeworth queda de la siguiente manera:

$$I_{M\text{-}E} = \frac{(1/2)\sum P_n\left(q_0 + q_n\right)}{(1/2)\sum P_0\left(q_0 + q_n\right)}\ x\ 100 = \frac{\sum P_n\left(q_0 + q_n\right)}{\sum P_0\left(q_0 + q_n\right)}\ x\ 100$$

Ejemplo: calcular el índice de Marshall-Edgeworth con los datos que hemos manejado de las compras del consumidor.

Datos de las compras de un consumidor

	1990		**1998**			
	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad	P_o $(qo+q_n)$	P^ $(qo+q_n)$
Jamón	0.80	2	1.20	1.5	2.8	4.2
Tortillas	0.10	4	0.08	6.0	1.0	0.8
Pan	1.00	1	2.00	0.5	1.5	3.0
Periódico	0.10	1	0.25	1.0	0.2	0.5

Entonces tenemos que: $I_{M\cdot E} = \dfrac{\sum P_n\left(q_0 + q_n\right)}{\sum P_0\left(q_0 + q_n\right)}\ x\ 100 = \dfrac{8.5}{5.5} = 154.5$

También existe la fórmula
para calcular la media de precios relativos de Marshall-Edgeworth. Su fórmula es la siguiente:

$$I_{M\text{-}E} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(P_n / P_0\right)\left[P_0\left(q_0 + q_n\right)\right]\right\}}{\sum_{i=1}^{n}\left[P_0\left(q_0 + q_n\right)\right]}$$

Nosotros no haremos ningún ejercicio en este caso pero el alumno lo puede realizar.

Finalmente, diremos que los índices de precios de Marshall-Edgeworth, no están sesgados con respecto a los movimientos de los precios; sin embargo, al igual que los índices de Paasche, los índices Marshall-Edgeworth, también requieren un grupo de ponderaciones continuamente ajustadas, por desgracia, esta necesidad laboriosa y de alto costo prohibe hacer comparaciones de movimientos de precios entre un periodo y otro.

Por último, mencionaremos algunos índices de los más utilizados en economía: índice nacional de precios al consumidor, El índice de precios al mayoreo; índice de promedio industrial Dow-Jones; y el índice de producción industrial. También está el índice nacional de precios al productor, etcétera.

Ejercicio global (6.5.1): tomando como base los siguientes datos calcule todos los diferentes índices que se estudiaron en este capítulo, considere que los precios están dados en pesos y las cantidades en kilogramos.

Precios pagados a los pescadores
por diferentes tipos de pescado

	1980		1990	
Pescado	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
Bacalao	6.5	40.0	11.2	53.0
Lenguado	12.2	127.0	15.3	169.0
Merluza	7.9	119.0	22.7	27.0
Perca	4.0	141.0	4.9	55.0
Atún	15.7	298.0	26.2	393.0

6.6 CAMBIO DEL PERIODO BASE

Cuando se estudian los números índices, al tomador de decisiones le interesa comparar el valor actual del índice con algún periodo base o punto de referencia. No obstante, es difícil relacionar comparaciones de precios con puntos de referencia en un pasado muy lejano. En estas circunstancias es deseable cambiar el periodo base. Asimismo, un tomador de decisiones se ve envuelto con frecuencia en la comparación de dos series de números índices, cada uno con puntos de referencia diferentes. También en estos casos es factible cambiar el periodo base de una de las dos series de números índice a fin de que concuerde con el de la otra serie.

Para cambiar de base sólo se divide cada número índice de la serie entre el valor del número índice que está expresado en el nuevo periodo de base deseado. Después se multiplica cada resultado por 100 para obtener el nuevo grupo de números índices transformados con la nueva base.

La fórmula sería la siguiente: $I_{nuevo}^{(t)} = \frac{I_{viejo}^{(t)}}{I_{base\ deseada}^{(o)}} \times 100$

Donde:

$I_{nuevo}^{(t)} =$ Número

plazada.

Número índice en el periodo de tiempo *t,* con base vieja.

$I_{viejo}^{(t)} =$

a establecer como la nueva base

$I_{base\ deseada}^{(o)} =$ Valor del número índice con la

Ejemplo: a partir de la siguiente serie realice el cambio de base del año de 1960 al año de 1967.

índices de precios del camarón en los años de 1960-1975
(pesos)

Año	índice de precios base 1960 = 100	índice de precios con base 1967 = 100
1960	100.0	(100.0/94.3) x 100 = 106.0
1961	86.9	(86.9/94.3) x 100= 92.1
1962	79.5	(79.5/94.3) x 100= 84.3
1963	68.9	(68.9/94.3) x 100= 73.1
1964	65.6	(65.6/94.3) x 100= 69.9
1965	77.9	(77.9/94.3) x 100= 82.6
1966	104.1	(104.1/94.3) x 100= 110.4
1967	94.3	(94.3/94.3) x 100 = 100.0
1968	93.4	(93.4/94.3) x 100= 99.0
1969	112.3	(112.3/94.3) x 100= 119.1
1970	125.4	(125.4/94.3) x 100= 133.0
1971	136.9	(136.9/94.3) x 100= 145.2
1972	175.4	(175.4/94.3) x 100= 186.0
1973	194.3	(194.3/94.3) x 100 = 206.0
1974	217.2	(217.2/94.3) x 100 = 230.3
1975	284.4	(284.4/94.3) x 100 = 301.6

Ejercicio (6.6.1): cambiar la nueva serie a una nueva base 1970, 1962 y 1974.

6.7 Deflación y poder de compra

6.7.1 Deflación

La unidad usada para expresar la magnitud de las transacciones y operaciones financieras, así como muchas económicas y de los negocios en este país es el peso, pero a veces podemos notar que no mantiene un valor constante al pasar el tiempo. Suelen escucharse reflexiones como "el peso no compra lo que antes", "el peso se ha depreciado", "el peso ha perdido su poder de compra", etc. Al comparar el precio de una barra de pan, hoy con su precio de hace diez años, concluiremos que el precio del pan ha subido o el valor del dinero se ha depreciado.

Cuando se hacen varias reflexiones como las anteriores y es predominante el caso del precio que ha subido, puede esperarse la conclusión de que el peso, en términos de lo que puede comprar, haya perdido parte de su valor.

Una serie de tiempo expresada en valores de pesos puede representar los cambios combinados de precios y cantidades de un solo artículo o un grupo de artículos. El proceso de remover o eliminar los efectos de cambios de precios de los bienes se llama deflación. Los valores del peso deflactados representan los cambios en la cantidad. La deflación puede ser hecha mediante la siguiente expresión:

$$\text{Valor del peso deflactado}$$

$$= \frac{\text{Valor original del peso}}{\text{índice de precios correspondiente o apropiado}} \times 100$$

En algunos casos, los índices de precios que se tienen que utilizar no están disponibles, por lo tanto debemos seleccionar un índice de precios apropiado para la deflación.

Veamos algunos ejemplos: calculemos los valores deflacionados de la siguiente serie de las ventas de una compañía.

Ventas anuales de la compañía X
(miles de pesos)

Año	Ventas	INPC	Valores deflactados
1970	880	116.3	(880/116.3) x 100 = 757
1971	940	121.3	(940/121.3) x 100 = 775

1972	1 100	125.3	(1 100/125.3) x 100= 878
1973	1 450	133.1	(1 450/133.1) x 100 = 1 089
1974	1 790	147.7	(1 790/147.7) x 100= 1 212
1975	1 825	161.2	(1 825/161.2) x 100 = 1 132

Nota: es importante saber cuál es el año base para las conclusiones.

Otro ejemplo: La siguiente tabla muestra el salario semanal promedio de los trabajadores en el comercio minorista de la Ciudad de México durante los años de 1973 a 1983. También contiene el índice de precios al consumo para esos años con 1972 como base.

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
$ prom. sem.	96.32	102.68	108.86	114.60	121.66	130.20	138.62	147.38	158.03	163.85	171.05
INPC 1972 = 100	106.2	117.9	128.7	136.1	144.9	155.9	173.5	197.0	217.4	230.7	238.1

a. En términos del salario promedio de 1973, determinar los salarios reales en los años de 1973-1983.

Solución: hallar primero un número índice de precios al consumo con 1973 como base, es decir, cambiaremos de base a la serie, esto lo haremos dividiendo todos los índices de precios entre la nueva base y multiplicando por 100 el resultado. Con lo anterior formaremos la nueva serie de índices de precios tomando como base el año de 1973. Ahora, para encontrar los salarios reales, dividiremos los salarios promedio entre los índices de precios para cada año.

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
$ prom. sem.	96.32	92.50	89.82	89.39	89.19	88.69	84.83	79.45	77.20	75.44	76.29
INPC 1973 = 100	100.0	111.0	121.2	128.2	136.4	146.8	163.4	185.5	204.7	217.2	224.2

Con un poco de análisis podemos decir que si vemos los datos sin deflactar, los salarios casi se duplicaron de 1973 a 1983, pero si restamos el efecto de los cambios en los precios, podemos notar que, en términos reales, en realidad el salario disminuyó casi en 20 unidades monetarias en el mismo periodo.

También, si aplicamos una simple tasa de crecimiento podemos ver el crecimiento negativo que sufrieron los salarios promedio semanales en ese periodo:

$$\frac{76.29}{96.32} - 1 \times 100 = -20.79 \approx 21\%$$

A los valores deflactados del peso también suele llamárseles de diferentes maneras, tales como pesos constantes, salarios o ingresos reales, poder de compra del peso y otros.

6.7.2 Poder de compra

El poder de compra de cualquier moneda, medido con base en el índice de precios al consumidor, puede calcularse también por cada año dado, para ello basta con calcular el recíproco de cada índice de precios de cada año, esto nos indicará el valor de compra que tiene una unidad monetaria, es decir, un peso de hoy con respecto al año base.

Veamos un ejemplo: con base en los datos del ejercicio anterior, determine el deterioro del poder adquisitivo del peso en los diversos años con respecto del poder adquisitivo de un peso en 1973.

Respuesta: únicamente tenemos que aplicar el recíproco correspondiente a cada índice de precios o lo que es lo mismo, dividir 1 entre cada índice de precios para poder definir el deterioro del poder adquisitivo como se muestra a continuación:

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
INPC 1973 =100	1/1.0	1/1.110	1/1.212	1/1.282	1/1.364	1/1.468	1/1.634	1/1.855	1/2.047	1/2.172	1/2.242
Poder adquisitivo	1.0	0.90	0.83	0.78	0.73	0.68	0.61	0.54	0.49	0.46	0.45

Existen diferentes formas de interpretar estos resultados, veamos algunas:

a. El índice muestra el poder adquisitivo de un peso de 1973 en los años siguientes.
b. En 1983, el índice de 0.45 significa que un peso de 1983 permitirá comprar sólo 45% de lo que se podía comprar con un peso de 1973.
c. También podemos decir que un peso de 1983 representa únicamen te 45 centavos de uno de 1973.
d. También podemos decir, que con 45 centavos de un peso de 1973 se podría comprar lo que hoy (1983), se compra con un peso.
e. También se dice que por cada peso cobrado en 1973, un trabajador debería cobrar, en 1983, el equivalente a $1/0.45 = $2.22 pesos para poder compensar el efecto de la inflación.
f. En términos de pesos constantes se puede decir que los trabajadores recibieron menos sueldo al pasar los años. Por ejemplo, en 1973

cobraron $96.32, en 1974 el equivalente a $92.50, en 1975 el equivalente a $89.82... etcétera.

Finalmente, los datos expresados en términos del valor del peso en algún periodo específico de tiempo, se dicen expresados en pesos constantes (con respecto al periodo dado como referencia o base).

Ejercicio global final (6.7.1):

Esto es en realidad un concentrado de los ejercicios que se fueron dejando en cada punto y se piden también algunas definiciones de conceptos que también se vieron; puede servir como práctica para todo este capítulo.

1. Defina el concepto de número índice.
2. Explique los números índices simples, de precio, cantidad y valor. Muestre también la forma de calcularlos con un ejemplo pequeño.
3. Explique los números índices agregados, de precio, cantidad y valor. Muestre también la forma de calcularlos con un ejemplo pequeño.
4. Explique el concepto y la manera de calcular los índices de precios de Laspeyres.
5. Explique el concepto y la manera de calcular los índices de precios de Raasche.
6. Explique el concepto y la manera de calcular los índices de precios de Fisher.
7. Explique brevemente el procedimiento para realizar el cambio de base.
8. Defina el concepto de poder de compra y muestre con un ejemplo pequeño la manera de calcularlo.
9. Con base en la siguiente tabla del consumo de productos lácteos de un individuo.

Consumo de productos lácteos

	1990		1998	
	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
Leche	1.20	2.0	1.80	1.5
Mantequilla	1.50	2.0	2.25	2.5
Queso	1.30	0.5	1.95	1.0

Calcule y dé la interpretación económica de:

a. Los índices simples de precios, cantidad y valor.
b. Los índices agregados simples de precios, cantidad y valor.
c. Los índices agregados ponderados de precios, cantidad y valor.
d. El índice de Laspeyres.
e. El índice de Paasche.
f. El índice de Fischer.

10. De la siguiente tabla calcular el índice de Laspeyres, Paasche y de Fisher.

Precios y cantidades consumidas de varios metales en México en los años de 1975 y 1984

	1975		**1984**	
	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
Cobre	64.2	3 440.0	66.8	240.6
Plomo	21.5	1 144.0	25.6	710.0
Estaño	339.8	49.4	623.8	42.8
Zinc	39.0	1 068.0	48.6	558.0

11. Con base en los siguientes datos, calcule los mismos puntos que se piden en el problema 9 (considere que los precios están dados en pesos y las cantidades en kilogramos para las interpretaciones).

Precios pagados a los pescadores por diferentes
tipos seleccionados de pescado

	1980		1990	
Pescado	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
Bacalao	6.5	40.0	11.2	53.0
Lenguado	12.2	127.0	15.3	169.0
Merluza	7.9	119.0	22.7	27.0
Mojarra	4.0	141.0	4.9	55.0
Atún	15.7	298.0	26.2	393.0

12. A partir de la siguiente serie, realice el cambio de base del año de 1960 al año de 1962, posteriormente realice el cambio de base del año 1962 a 1965.

Precios pagados a pescadores de camarón
en los años de 1960-1967 (pesos)

Año	índice de precios con base 1960 = 100	índice de precios con base 1962 = 100	índice de precios con base 1965 = 100
1960	100.0		
1961	86.9		
1962	79.5		
1963	68.9		
1964	65.6		
1965	77.9		
1966	104.1		
1967	94.3		

13. Calcule los valores deflactados, es decir, a precios reales de la siguiente serie de ventas de una compañía.

Ventas anuales de la compañía X (miles de pesos)

Año	Ventas	INPC	Valores deflactados
1970	880	100.0	
1971	940	112.3	
1972	1 100	115.3	
1973	1 450	123.1	
1974	1 790	137.7	
1975	1 825	151.2	

14. Con base en los datos de la siguiente tabla determine el deterioro del poder adquisitivo del peso en los diversos años con respecto del poder adquisitivo de un peso en 1974.

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
INPC 1973 = 100	1.0	1.110	1.212	1.282	1.364	1.468	1.634	1.855	2.047	2.172	2.242
Poder adquisitivo											

Nota: En este ejercicio primero hay que cambiar de base de 1973 a base 1974 pero hay que darnos cuenta que, en este caso, el índice no se presenta multiplicado por 100, de lo contrario se tendría que dividir 100 entre el índice, que si fuera multiplicado por 100, por eso mejor dejarlo sin multiplicar por 100 para poder dividir 1 entre el resultado del nuevo índice.

APÉNDICE

Tabla 1
Probabilidades de la distribución binomial

P

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	0.4000	0.3500	0.3000	0.2500	0.2000	0.1500	0.1000	0.0500
	1	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000	0.5500	0.6000	0.6500	0.7000	0.7500	0.8000	0.8500	0.9000	0.9500
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500	0.2025	0.1600	0.1250	0.0900	0.0625	0.0400	0.0225	0.0100	0.0025
	1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000	0.4950	0.4800	0.4500	0.4200	0.3750	0.3200	0.2550	0.1800	0.0950
	2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500	0.3025	0.3600	0.4225	0.4900	0.5625	0.6400	0.7225	0.8100	0.9025
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250	0.0911	0.0640	0.0429	0.0270	0.0156	0.0900	0.0034	0.0010	0.0001
	1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750	0.3341	0.2880	0.2389	0.1890	0.1406	0.0960	0.0574	0.0270	0.0071
	2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750	0.4084	0.4320	0.4436	0.4410	0.4219	0.3840	0.3251	0.2430	0.1354
	3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250	0.1664	0.2160	0.2746	0.3430	0.4219	0.5120	0.6141	0.7290	0.8574
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625	0.0410	0.0256	0.0150	0.0081	0.0039	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500	0.2005	0.1536	0.1115	0.0756	0.0469	0.0256	0.0115	0.0036	0.0005
	2	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750	0.3675	0.3456	0.3105	0.2646	0.2109	0.1536	0.0975	0.0486	0.0135
	3	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500	0.2995	0.3456	0.3845	0.4116	0.4219	0.4096	0.3685	0.2916	0.1715
	4	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625	0.0915	0.1296	0.1785	0.2401	0.3164	0.4096	0.5220	0.6561	0.8145
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313	0.0185	0.0102	0.0053	0.0024	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563	0.1128	0.0768	0.0488	0.0284	0.0146	0.0064	0.0022	0.0004	0.0000
	2	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125	0.2757	0.2304	0.1811	0.1323	0.0879	0.0512	0.0244	0.0081	0.0011
	3	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125	0.3369	0.3456	0.3364	0.3087	0.2637	0.2048	0.1382	0.0729	0.0214
	4	0.0000	0.0004	0.0022	0.0064	0.0146	0.0283	0.0488	0.0768	0.1128	0.1562	0.2059	0.2592	0.3124	0.3610	0.3955	0.4096	0.3915	0.3281	0.2036
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0312	0.0503	0.0778	0.1160	0.1681	0.2373	0.3277	0.4437	0.5905	0.7738
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156	0.0083	0.0041	0.0018	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938	0.0609	0.0369	0.0205	0.0102	0.0044	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000
	2	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344	0.1861	0.1382	0.0951	0.0595	0.0330	0.0154	0.0055	0.0012	0.0001
	3	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125	0.3032	0.2765	0.2355	0.1852	0.1318	0.0819	0.0415	0.0146	0.0021
	4	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344	0.2780	0.3110	0.3280	0.3241	0.2966	0.2458	0.1762	0.0984	0.0305
	5	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0937	0.1359	0.1866	0.2437	0.3025	0.3560	0.3932	0.3993	0.3543	0.2321
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156	0.0277	0.0467	0.0754	0.1176	0.1780	0.2621	0.3771	0.5314	0.7351
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1135	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078	0.0037	0.0016	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547	0.0320	0.0172	0.0084	0.0036	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641	0.1172	0.0774	0.0466	0.0250	0.0115	0.0043	0.0012	0.0002	0.0000
	3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2979	0.2903	0.2918	0.2734	0.2388	0.1935	0.1442	0.0972	0.0577	0.0287	0.0109	0.0026	0.0002
	4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2384	0.2734	0.2918	0.2903	0.2679	0.2269	0.1730	0.1147	0.0617	0.0230	0.0036
	5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641	0.2140	0.2613	0.2985	0.3177	0.3115	0.2753	0.2097	0.1240	0.0406
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547	0.0872	0.1306	0.1848	0.2471	0.3115	0.3670	0.3960	0.3720	0.2573
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078	0.0152	0.0280	0.0490	0.0824	0.1335	0.2097	0.3206	0.4783	0.6983

Tabla 1
Probabilidades de la distribución binomial

P

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	0.0017	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313	0.0164	0.0079	0.0033	0.0012	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094	0.0703	0.0413	0.0217	0.0100	0.0038	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188	0.1719	0.1239	0.0808	0.0467	0.0231	0.0092	0.0026	0.0004	0.0000
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734	0.2627	0.2322	0.1875	0.1361	0.0865	0.0459	0.0185	0.0046	0.0004
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188	0.2568	0.2787	0.2786	0.2541	0.2076	0.1468	0.0839	0.0331	0.0054
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094	0.1569	0.2090	0.2587	0.2965	0.3115	0.2936	0.2376	0.1488	0.0515
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0312	0.0548	0.0896	0.1373	0.1977	0.2670	0.3355	0.3847	0.3826	0.2793
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039	0.0084	0.0168	0.0319	0.0576	0.1001	0.1678	0.2725	0.4305	0.6634
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	0.0008	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.2986	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176	0.0083	0.0035	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703	0.0407	0.0212	0.0098	0.0039	0.0012	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641	0.1160	0.0743	0.0424	0.0210	0.0087	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461	0.2128	0.1672	0.1181	0.0735	0.0389	0.0165	0.0050	0.0008	0.0000
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461	0.2600	0.2508	0.2194	0.1715	0.1168	0.0661	0.0283	0.0074	0.0006
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641	0.2119	0.2508	0.2716	0.2668	0.2336	0.1762	0.1069	0.0116	0.0077
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703	0.1110	0.1612	0.2162	0.2668	0.3003	0.3020	0.2597	0.1722	0.0629
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176	0.0339	0.0605	0.1004	0.1556	0.2253	0.3020	0.3679	0.3874	0.2986
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020	0.0046	0.0101	0.0207	0.0404	0.0751	0.1342	0.2316	0.3874	0.6302
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098	0.0042	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439	0.0229	0.0106	0.0043	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172	0.0746	0.0425	0.0212	0.0090	0.0031	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051	0.1596	0.1115	0.0689	0.0368	0.0162	0.0055	0.0012	0.0001	0.0000
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461	0.2340	0.2007	0.1536	0.1029	0.0584	0.0264	0.0085	0.0015	0.0001
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0686	0.1115	0.1596	0.2051	0.2384	0.2508	0.2377	0.2001	0.1460	0.0881	0.0401	0.0112	0.0010
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172	0.1665	0.2150	0.2522	0.2668	0.2503	0.2013	0.1298	0.0574	0.0105
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439	0.0763	0.1209	0.1757	0.2335	0.2816	0.3020	0.2759	0.1937	0.0746
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098	0.0207	0.0403	0.0725	0.1211	0.1877	0.2684	0.3474	0.3874	0.3155
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0025	0.0060	0.0165	0.0282	0.0563	0.1074	0.1969	0.3487	0.2987

Tabla 1
Probabilidades de la distribución binomial

P

n	*x*	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0008	0.0036	0.0014	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054	0.0021	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269	0.0126	0.0052	0.0018	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806	0.0462	0.0234	0.0102	0.0037	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611	0.1128	0.0701	0.0379	0.0173	0.0064	0.0017	0.0003	0.0000	0.0000
	5	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256	0.1931	0.1471	0.0985	0.0566	0.0268	0.0097	0.0023	0.0003	0.0000
	6	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256	0.2360	0.2207	0.1830	0.1321	0.0803	0.0388	0.0132	0.0025	0.0001
	7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611	0.2060	0.2365	0.2428	0.2201	0.1721	0.1107	0.0536	0.0158	0.0014
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806	0.1259	0.1774	0.2254	0.2568	0.2581	0.2215	0.1517	0.0710	0.0137
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269	0.0513	0.0887	0.1395	0.1998	0.2581	0.2953	0.2866	0.2131	0.0867
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054	0.0125	0.0266	0.0518	0.0932	0.1549	0.2362	0.3248	0.3835	0.3293
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005	0.0014	0.0036	0.0088	0.0198	0.0422	0.0859	0.1673	0.3138	0.5688
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161	0.0068	0.0025	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537	0.0277	0.0125	0.0048	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208	0.0762	0.0420	0.0199	0.0078	0.0024	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
	5	0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934	0.1489	0.1009	0.0591	0.0291	0.0115	0.0033	0.0006	0.0000	0.0000
	6	0.0000	0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256	0.2124	0.1766	0.1281	0.0792	0.0401	0.0155	0.0040	0.0005	0.0000
	7	0.0000	0.0000	0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934	0.2225	0.2270	0.2039	0.1585	0.1032	0.0532	0.0193	0.0038	0.0002
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208	0.1700	0.2128	0.2367	0.2311	0.1936	0.1329	0.0683	0.0213	0.0021
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0535	0.0923	0.1419	0.1954	0.2397	0.2581	0.2362	0.1720	0.0852	0.0173
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161	0.0339	0.0639	0.1088	0.1678	0.2323	0.2835	0.2924	0.2301	0.0988
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0029	0.0075	0.0174	0.0368	0.0712	0.1267	0.2062	0.3012	0.3766	0.3413
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0008	0.0022	0.0057	0.0138	0.0317	0.0687	0.1422	0.2824	0.5404

Tabla 2

Probabilidades acumuladas de la distribución binomial

P

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	0.4000	0.3500	0.3000	0.2500	0.2000	0.1500	0.1000	0.0500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500	0.2025	0.1600	0.1225	0.0900	0.0625	0.0400	0.0225	0.0100	0.0025
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500	0.6975	0.6400	0.5775	0.5100	0.4375	0.3600	0.2775	0.1900	0.0975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250	0.0911	0.0640	0.0429	0.0270	0.0156	0.0080	0.0034	0.0010	0.0001
	1	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7182	0.6480	0.5748	0.5000	0.4252	0.3520	0.2818	0.2160	0.1562	0.1040	0.0608	0.0280	0.0072
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750	0.8336	0.7840	0.7254	0.6570	0.5781	0.4880	0.3859	0.2710	0.1426
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625	0.0410	0.0256	0.0150	0.0081	0.0039	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125	0.2415	0.1792	0.1265	0.0837	0.0508	0.0272	0.0120	0.0037	0.0005
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875	0.6090	0.5248	0.4370	0.3483	0.2617	0.1808	0.1095	0.0523	0.0140
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375	0.9085	0.8704	0.8215	0.7599	0.6836	0.5904	0.4780	0.3439	0.1855
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313	0.0185	0.0102	0.0053	0.0024	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9774	0.9186	0.8352	0.7373	0.6328	0.5283	0.4284	0.3370	0.2562	0.1876	0.1312	0.0870	0.0541	0.0308	0.0156	0.0067	0.0022	0.0004	0.0000
	2	0.9988	0.9915	0.9734	0.9421	0.8965	0.8370	0.7648	0.6826	0.5931	0.5001	0.4069	0.3174	0.2352	0.1631	0.1035	0.0579	0.0266	0.0085	0.0012
	3	1.0000	0.9996	0.9978	0.9933	0.9844	0.9693	0.9459	0.9130	0.8688	0.8126	0.7438	0.6630	0.5716	0.4718	0.3672	0.2627	0.1648	0.0814	0.0226
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688	0.9497	0.9222	0.8840	0.8319	0.7627	0.6723	0.5563	0.4095	0.2262
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156	0.0083	0.0041	0.0018	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9672	0.8857	0.7764	0.6553	0.5340	0.4201	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094	0.0692	0.0410	0.0223	0.0109	0.0046	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000
	2	0.9978	0.9841	0.9526	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438	0.2553	0.1792	0.1174	0.0705	0.0376	0.0170	0.0059	0.0013	0.0001
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563	0.5585	0.4557	0.3529	0.2557	0.1694	0.0989	0.0474	0.0159	0.0022
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8907	0.8364	0.7667	0.6809	0.5798	0.4660	0.3447	0.2236	0.1143	0.0328
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844	0.9723	0.9533	0.9246	0.8824	0.8220	0.7379	0.6229	0.4686	0.2649
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 2

Probabilidades acumuladas de la distribución binomial

		P																		
n	*x*	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1135	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078	0.0037	0.0016	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625	0.0357	0.0188	0.0090	0.0038	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266	0.1529	0.0963	0.0556	0.0288	0.0129	0.0047	0.0012	0.0002	0.0000
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000	0.3917	0.2898	0.1998	0.1260	0.0706	0.0333	0.0121	0.0027	0.0002
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734	0.6836	0.5801	0.4677	0.3529	0.2436	0.1480	0.0738	0.0257	0.0038
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375	0.8976	0.8414	0.7662	0.6706	0.5551	0.4233	0.2834	0.1497	0.0444
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922	0.9848	0.9720	0.9510	0.9176	0.8665	0.7903	0.6794	0.5217	0.3017
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	0.0017	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9427	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1692	0.1064	0.0632	0.0352	0.0181	0.0085	0.0035	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6786	0.5518	0.4279	0.3154	0.2201	0.1445	0.0885	0.0498	0.0252	0.0113	0.0042	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
	3	0.9996	0.9950	0.9787	0.9437	0.8862	0.8059	0.7065	0.5941	0.4470	0.3633	0.2604	0.1737	0.1060	0.0580	0.0273	0.0104	0.0028	0.0004	0.0000
	4	1.0000	0.9996	0.9972	0.9896	0.9727	0.9420	0.8940	0.8263	0.7396	0.6367	0.5230	0.4059	0.2935	0.1941	0.1138	0.0563	0.0213	0.0050	0.0004
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9748	0.9502	0.9115	0.8555	0.7799	0.6846	0.5721	0.4482	0.3214	0.2031	0.1052	0.0381	0.0058
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9965	0.9915	0.9819	0.9648	0.9368	0.8936	0.8308	0.7447	0.6329	0.4967	0.3428	0.1869	0.0573
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961	0.9916	0.9832	0.9681	0.9424	0.8999	0.8322	0.7275	0.5695	0.3366
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	0.0008	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3004	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195	0.0091	0.0038	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9917	0.9470	0.8592	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898	0.0498	0.0250	0.0112	0.0043	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539	0.1658	0.0994	0.0536	0.0253	0.0100	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000	0.3786	0.2666	0.1717	0.0988	0.0489	0.0196	0.0056	0.0009	0.0000
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461	0.6386	0.5174	0.3911	0.2703	0.1657	0.0856	0.0339	0.0083	0.0006
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102	0.8505	0.7682	0.6627	0.5372	0.3993	0.2618	0.1408	0.0530	0.0083
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805	0.9615	0.9295	0.8789	0.8040	0.6996	0.5638	0.4005	0.2252	0.0712
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9954	0.9899	0.9793	0.9596	0.9249	0.8658	0.7684	0.6126	0.3698
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9138	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0463	0.0232	0.0107	0.0045	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9884	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1672	0.0995	0.0547	0.0274	0.0123	0.0048	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9989	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3822	0.2660	0.1719	0.1020	0.0548	0.0260	0.0106	0.0035	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6330	0.5044	0.3770	0.2616	0.1663	0.0949	0.0473	0.0197	0.0064	0.0014	0.0001	0.0000
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8337	0.7384	0.6230	0.4956	0.3670	0.2485	0.1503	0.0781	0.0328	0.0099	0.0016	0.0001
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281	0.7340	0.6178	0.4862	0.3504	0.2241	0.1209	0.5000	0.0128	0.0010
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453	0.9005	0.8328	0.7384	0.6172	0.4744	0.3222	0.1798	0.0702	0.0115

Tabla 2
Probabilidades acumuladas de la distribución binomial

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893	0.9768	0.9537	0.9140	0.8507	0.7560	0.6242	0.4557	0.2639	0.0861
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9975	0.9940	0.9865	0.9718	0.9437	0.8926	0.8031	0.6513	0.4013
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8981	0.6973	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059	0.0022	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327	0.0148	0.0059	0.0020	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9985	0.9814	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1134	0.0610	0.0293	0.0122	0.0043	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744	0.1738	0.0994	0.0501	0.0216	0.0076	0.0019	0.0003	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9997	0.9973	0.9884	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000	0.3669	0.2465	0.1487	0.0782	0.0343	0.0116	0.0027	0.0003	0.0000
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9981	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256	0.6029	0.4672	0.3317	0.2103	0.1146	0.0504	0.0159	0.0028	0.0001
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867	0.8089	0.7037	0.5744	0.4304	0.2867	0.1611	0.0694	0.0186	0.0015
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673	0.9348	0.8811	0.7999	0.6873	0.5448	0.3826	0.2212	0.0896	0.0152
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941	0.9861	0.9698	0.9394	0.8870	0.8029	0.6779	0.5078	0.3027	0.1019
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9986	0.9964	0.9912	0.9802	0.9578	0.9141	0.8327	0.6862	0.4312
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193	0.0079	0.0028	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730	0.0356	0.0153	0.0056	0.0017	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938	0.1117	0.0573	0.0255	0.0095	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872	0.2607	0.1582	0.0846	0.0386	0.0143	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000
	6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128	0.4731	0.3348	0.2127	0.1178	0.0544	0.0194	0.0046	0.0005	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062	0.6956	0.5618	0.4167	0.2763	0.1576	0.0726	0.0239	0.0043	0.0002
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270	0.8655	0.7747	0.6533	0.5075	0.3512	0.2054	0.0922	0.0256	0.0022
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807	0.9579	0.9166	0.8487	0.7472	0.6093	0.4417	0.2642	0.1109	0.0196
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968	0.9917	0.9804	0.9576	0.9150	0.8416	0.7251	0.5565	0.3410	0.1184
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9992	0.9978	0.9943	0.9862	0.9683	0.9313	0.8578	0.7176	0.4596
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112	0.0041	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9669	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461	0.0203	0.0078	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334	0.0698	0.0321	0.0126	0.0040	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7154	0.5744	0.4268	0.2905	0.1788	0.0977	0.0462	0.0182	0.0056	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000	0.3563	0.2288	0.1295	0.0624	0.0243	0.0070	0.0013	0.0001	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095	0.5732	0.4256	0.2841	0.1654	0.0802	0.0300	0.0075	0.0009	0.0000

Tabla 2

Probabilidades acumuladas de la distribución binomial

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666	0.7721	0.6470	0.4995	0.3457	0.2060	0.0991	0.0342	0.0065	0.0003
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539	0.9071	0.8314	0.7217	0.5794	0.4157	0.2527	0.1180	0.0342	0.0031
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888	0.9731	0.9421	0.8868	0.7975	0.6674	0.4983	0.3080	0.0339	0.0245
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9951	0.9874	0.9704	0.9363	0.8733	0.7664	0.6017	0.3787	0.1354
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9963	0.9903	0.9762	0.9450	0.8791	0.7458	0.4867
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065	0.0022	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287	0.0114	0.0039	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898	0.0426	0.0175	0.0060	0.0017	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120	0.1189	0.0583	0.0243	0.0083	0.0022	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953	0.2586	0.1501	0.0753	0.0315	0.0103	0.0024	0.0003	0.0000	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047	0.4539	0.3075	0.1836	0.0933	0.0383	0.0116	0.0022	0.0002	0.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880	0.6627	0.5141	0.3595	0.2195	0.1117	0.0439	0.0115	0.0015	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102	0.8328	0.7207	0.5773	0.4158	0.2585	0.1298	0.0467	0.0092	0.0004
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713	0.9368	0.8357	0.7795	0.6448	0.4787	0.3018	0.1465	0.0441	0.0042
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935	0.9830	0.9602	0.9161	0.8392	0.7189	0.5519	0.3521	0.1584	0.0301
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9971	0.9919	0.9795	0.9525	0.8990	0.8021	0.6433	0.4154	0.1530
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9992	0.9976	0.9932	0.9822	0.9560	0.8972	0.7712	0.5123
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176	0.0063	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592	0.0255	0.0093	0.0028	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9999	0.9978	0.9964	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.3036	0.0769	0.0338	0.0124	0.0037	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9997	0.9994	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.5000	0.1818	0.0950	0.0422	0.0152	0.0042	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.6964	0.3465	0.2131	0.1132	0.0500	0.0173	0.0042	0.0006	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.8491	0.5478	0.3902	0.2452	0.1311	0.0566	0.0181	0.0036	0.0003	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9962	0.9231	0.9408	0.7392	0.5968	0.4357	0.2784	0.1484	0.0611	0.0168	0.0028	0.0001
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9824	0.8796	0.7827	0.6481	0.4845	0.3135	0.1642	0.0617	0.0127	0.0006
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9963	0.9576	0.9095	0.8273	0.7031	0.5387	0.3518	0.1773	0.0556	0.0055
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9995	0.9893	0.9729	0.9383	0.8732	0.7639	0.6020	0.3958	0.1841	0.0362
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9983	0.9948	0.9858	0.9647	0.9198	0.8329	0.6814	0.4510	0.1710
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9953	0.9966	0.9648	0.9196	0.7941	0.5367
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 2

Probabilidades acumuladas de la distribución binomial

P

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9571	0.7892	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106	0.0035	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4999	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384	0.0149	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3282	0.1976	0.1051	0.0486	0.0191	0.0062	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272	0.1241	0.0583	0.0229	0.0071	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9556	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018	0.2559	0.1423	0.0671	0.0257	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982	0.4371	0.2839	0.1594	0.0744	0.0271	0.0070	0.0011	0.0001	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728	0.6340	0.4728	0.3119	0.1753	0.0796	0.0257	0.0056	0.0005	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949	0.8024	0.6712	0.5100	0.3402	0.1897	0.0817	0.0235	0.0033	0.0001
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616	0.9147	0.8334	0.7108	0.5501	0.3698	0.2018	0.0791	0.0170	0.0009
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894	0.9719	0.9349	0.8661	0.7541	0.5950	0.4019	0.2107	0.0684	0.0070
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979	0.9934	0.9817	0.9549	0.9006	0.8029	0.6482	0.4386	0.2108	0.0429
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9906	0.9739	0.9365	0.8593	0.7161	0.4853	0.1892
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9900	0.9719	0.9257	0.8147	0.5599
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	1.0000	1.0000
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7922	0.4818	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9912	0.9174	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245	0.0086	0.0025	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717	0.0301	0.0106	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9992	0.9917	0.9613	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662	0.0826	0.0348	0.0120	0.0032	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145	0.1834	0.0919	0.0383	0.0127	0.0031	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000	0.3374	0.1989	0.0994	0.0403	0.0124	0.0026	0.0003	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9881	0.8166	0.6855	0.5257	0.3595	0.2128	0.1046	0.0402	0.0109	0.0017	0.0001	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338	0.7098	0.5522	0.3812	0.2248	0.1071	0.0377	0.0083	0.0008	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283	0.8529	0.7361	0.5803	0.4032	0.2347	0.1057	0.0319	0.0047	0.0001
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755	0.9404	0.8740	0.7352	0.6113	0.4261	0.2418	0.0987	0.0221	0.0012
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936	0.9816	0.9536	0.8972	0.7981	0.6470	0.4511	0.2444	0.0826	0.0088
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988	0.9959	0.9877	0.9673	0.9226	0.8363	0.6904	0.4802	0.2382	0.0503
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979	0.9933	0.9807	0.9499	0.8818	0.7475	0.5182	0.2078
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9977	0.9925	0.9775	0.9369	0.8332	0.5819
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.1000

Tabla 2

Probabilidades acumuladas de la distribución binomial

P

n	*x*	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1553	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2888	0.1077	0.0481	0.0183	0.0058	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189	0.0537	0.0203	0.0062	0.0014	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403	0.1280	0.0576	0.0212	0.0061	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073	0.2527	0.1347	0.0597	0.0210	0.0054	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9946	0.9790	0.9403	0.8653	0.7374	0.5927	0.4222	0.2632	0.1391	0.0596	0.0193	0.0043	0.0005	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597	0.6085	0.4366	0.2717	0.1407	0.0569	0.0163	0.0027	0.0002	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811	0.7742	0.6257	0.4509	0.2783	0.1390	0.0513	0.0118	0.0012	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519	0.8923	0.7912	0.6450	0.4656	0.2825	0.1329	0.0419	0.0064	0.0002
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846	0.9589	0.9058	0.8114	0.6673	0.4813	0.2836	0.1206	0.0282	0.0015
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962	0.9880	0.9672	0.9217	0.8354	0.6943	0.4990	0.2798	0.0982	0.0109
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9918	0.9764	0.9400	0.8647	0.7287	0.5203	0.2662	0.0581
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9954	0.9858	0.9605	0.9009	0.7759	0.5497	0.2265
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9944	0.9820	0.9464	0.8499	0.6028
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4650	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318	0.0109	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835	0.0342	0.0116	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796	0.0871	0.0352	0.0114	0.0028	0.0005	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0105	0.0023	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000	0.3290	0.1861	0.0875	0.0326	0.0089	0.0067	0.0001	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159	0.6762	0.5060	0.3325	0.1855	0.0839	0.0287	0.0233	0.0008	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204	0.6831	0.5122	0.3344	0.1820	0.0775	0.0676	0.0041	0.0003	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165	0.8273	0.6919	0.5188	0.3345	0.1749	0.1631	0.0163	0.0017	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682	0.9223	0.8371	0.7032	0.5261	0.3322	0.3267	0.0537	0.0086	0.0002
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9872	0.9904	0.9720	0.9304	0.8500	0.7178	0.5346	0.5449	0.1444	0.0352	0.0020
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978	0.9923	0.9770	0.9409	0.8668	0.7369	0.4631	0.3159	0.1150	0.0132
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9985	0.9945	0.9830	0.9538	0.8887	0.9171	0.5587	0.2946	0.0665
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9969	0.9896	0.9699	0.9356	0.8015	0.5797	0.2453
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9958	1.0000	0.9544	0.8649	0.6226
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 2

Probabilidades acumuladas de la distribución binomial

P

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207	0.0064	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577	0.0214	0.0065	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316	0.0580	0.0210	0.0060	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517	0.1308	0.0565	0.0196	0.0051	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119	0.2493	0.1275	0.0532	0.0171	0.0039	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881	0.4086	0.2447	0.1218	0.0480	0.0139	0.0026	0.0002	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483	0.5857	0.4044	0.2376	0.1133	0.0409	0.0100	0.0013	0.0001	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684	0.7480	0.5841	0.3990	0.2277	0.1018	0.0321	0.0059	0.0004	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423	0.8701	0.7500	0.5834	0.3920	0.2142	0.0867	0.0219	0.0024	0.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793	0.9447	0.8744	0.7546	0.5836	0.3828	0.1958	0.0673	0.0113	0.0003
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941	0.9811	0.9490	0.8818	0.7625	0.5852	0.3704	0.1702	0.0432	0.0026
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9840	0.9556	0.8929	0.7748	0.5886	0.3523	0.1330	0.0159
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9964	0.9879	0.9645	0.9087	0.7939	0.5951	0.3231	0.0755
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9979	0.9924	0.9757	0.9308	0.8244	0.6083	0.2642
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9968	0.9885	0.9612	0.8784	0.6415
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 3
Probabilidades de Poisson

					μ					
x	0.005	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.9950	0.9900	0.9802	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	0.9324	0.9231	0.9139
1	0.0050	0.0099	0.0192	0.0291	0.0384	0.0476	0.0565	0.0653	0.0738	0.0823
2	0.0000	0.0000	0.0002	0.0004	0.0008	0.0012	0.0017	0.0023	0.0030	0.0037
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

					μ					
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

					μ					
x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2	0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3	0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4	0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5	0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6	0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

TABLA 3

Probabilidades de Poisson

Continuación...

	μ									
x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5	0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0940	0.1008
6	0.0146	0.0174	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0504
7	0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0139	0.0163	0.0188	0.0216
8	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	μ									
x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1397	0.1304	0.1217	0.1135	0.1057	0.0984	0.0915	0.0850	0.0789	0.0733
2	0.2165	0.2087	0.2008	0.1929	0.1850	0.1771	0.1692	0.1615	0.1539	0.1465
3	0.2237	0.2226	0.2209	0.2186	0.2158	0.2125	0.2087	0.2046	0.2001	0.1954
4	0.1734	0.1781	0.1823	0.1858	0.1888	0.1912	0.1931	0.1944	0.1951	0.1954
5	0.1075	0.1140	0.1203	0.1264	0.1322	0.1377	0.1429	0.1477	0.1522	0.1563
6	0.0555	0.0608	0.0662	0.0716	0.0771	0.0826	0.0881	0.0936	0.0989	0.1042
7	0.0246	0.0278	0.0312	0.0348	0.0385	0.0425	0.0466	0.0508	0.0551	0.0595
8	0.0095	0.0111	0.0129	0.0148	0.0169	0.0191	0.0215	0.0241	0.0269	0.0298
9	0.0033	0.0040	0.0047	0.0056	0.0066	0.0076	0.0089	0.0102	0.0116	0.0132
10	0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0039	0.0045	0.0053
11	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019
12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

TABLA 3
Probabilidades de Poisson

Continuación...

	μ									
x	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0679	0.0630	0.0583	0.0540	0.0500	0.0462	0.0427	0.0395	0.0365	0.0337
2	0.1393	0.1323	0.1254	0.1188	0.1125	0.1063	0.1005	0.0948	0.0894	0.0842
3	0.1904	0.1852	0.1798	0.1743	0.1687	0.1631	0.1574	0.1517	0.1460	0.1404
4	0.1951	0.1944	0.1933	0.1917	0.1898	0.1875	0.1849	0.1820	0.1789	0.1755
5	0.1600	0.1633	0.1662	0.1687	0.1708	0.1725	0.1738	0.1747	0.1753	0.1755
6	0.1093	0.1143	0.1191	0.1237	0.1281	0.1323	0.1362	0.1398	0.1432	0.1462
7	0.0640	0.0686	0.0732	0.0778	0.0824	0.0869	0.0914	0.0959	0.1002	0.1044
8	0.0328	0.0360	0.0393	0.0428	0.0463	0.0500	0.0537	0.0575	0.0614	0.0653
9	0.0150	0.0168	0.0188	0.0209	0.0232	0.0255	0.0280	0.0307	0.0334	0.0363
10	0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0104	0.0118	0.0132	0.0147	0.0164	0.0181
11	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056	0.0064	0.0073	0.0082
12	0.0008	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0034
13	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

	μ									
x	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027	0.0025
1	0.0311	0.0287	0.0265	0.0244	0.0225	0.0207	0.0191	0.0176	0.0162	0.0149
2	0.0793	0.0746	0.0701	0.0659	0.0618	0.0580	0.0544	0.0509	0.0477	0.0446
3	0.1348	0.1293	0.1239	0.1185	0.1133	0.1082	0.1033	0.0985	0.0938	0.0892
4	0.1719	0.1681	0.1641	0.1600	0.1558	0.1515	0.1472	0.1428	0.1383	0.1339
5	0.1753	0.1748	0.1740	0.1728	0.1714	0.1697	0.1678	0.1656	0.1632	0.1606
6	0.1490	0.1515	0.1537	0.1555	0.1571	0.1584	0.1594	0.1601	0.1605	0.1606
7	0.1086	0.1125	0.1163	0.1200	0.1234	0.1267	0.1298	0.1326	0.1353	0.1377
8	0.0692	0.0731	0.0771	0.0810	0.0849	0.0887	0.0925	0.0962	0.0998	0.1033
9	0.0392	0.0423	0.0454	0.0486	0.0519	0.0552	0.0586	0.0620	0.0654	0.0688
10	0.0200	0.0220	0.0241	0.0262	0.0285	0.0309	0.0334	0.0359	0.0386	0.0413
11	0.0093	0.0104	0.0116	0.0129	0.0143	0.0157	0.0173	0.0190	0.0207	0.0225
12	0.0039	0.0045	0.0051	0.0058	0.0065	0.0073	0.0082	0.0092	0.0102	0.0113
13	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036	0.0041	0.0046	0.0052
14	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0022
15	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
16	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

TABLA 3

Probabilidades de Poisson

Continuación...

x	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0137	0.0126	0.0116	0.0106	0.0098	0.0090	0.0082	0.0076	0.0070	0.0064
2	0.0417	0.0390	0.0364	0.0340	0.0318	0.0296	0.0276	0.0258	0.0240	0.0223
3	0.0848	0.0806	0.0765	0.0726	0.0688	0.0652	0.0617	0.0584	0.0552	0.0521
4	0.1294	0.1249	0.1205	0.1162	0.1118	0.1076	0.1034	0.0992	0.0952	0.0912
5	0.1579	0.1549	0.1519	0.1487	0.1454	0.1420	0.1385	0.1349	0.1314	0.1277
6	0.1605	0.1601	0.1595	0.1586	0.1575	0.1562	0.1546	0.1529	0.1511	0.1490
7	0.1399	0.1418	0.1435	0.1450	0.1462	0.1472	0.1480	0.1486	0.1489	0.1490
8	0.1066	0.1099	0.1130	0.1160	0.1188	0.1215	0.1240	0.1263	0.1284	0.1304
9	0.0723	0.0757	0.0791	0.0825	0.0858	0.0891	0.0923	0.0954	0.0985	0.1014
10	0.0441	0.0469	0.0498	0.0528	0.0558	0.0588	0.0618	0.0649	0.0679	0.0710
11	0.0245	0.0265	0.0285	0.0307	0.0330	0.0353	0.0377	0.0401	0.0426	0.0452
12	0.0124	0.0137	0.0150	0.0164	0.0179	0.0194	0.0210	0.0227	0.0245	0.0264
13	0.0058	0.0065	0.0073	0.0081	0.0089	0.0098	0.0108	0.0119	0.0130	0.0142
14	0.0025	0.0029	0.0033	0.0037	0.0041	0.0046	0.0052	0.0058	0.0064	0.0071
15	0.0010	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0020	0.0023	0.0026	0.0029	0.0033
16	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0010	0.0011	0.0013	0.0014
17	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006
18	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

μ

x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0059	0.0054	0.0049	0.0045	0.0041	0.0038	0.0035	0.0032	0.0029	0.0027
2	0.0208	0.0194	0.0180	0.0167	0.0156	0.0145	0.0134	0.0125	0.0116	0.0107
3	0.0492	0.0464	0.0438	0.0413	0.0389	0.0366	0.0345	0.0324	0.0305	0.0286
4	0.0874	0.0836	0.0799	0.0764	0.0729	0.0696	0.0663	0.0632	0.0602	0.0573
5	0.1241	0.1204	0.1167	0.1130	0.1094	0.1057	0.1021	0.0986	0.0951	0.0916
6	0.1468	0.1445	0.1420	0.1394	0.1367	0.1339	0.1311	0.1282	0.1252	0.1221
7	0.1489	0.1486	0.1481	0.1474	0.1465	0.1454	0.1442	0.1428	0.1413	0.1396
8	0.1321	0.1337	0.1351	0.1363	0.1373	0.1382	0.1388	0.1392	0.1395	0.1396
9	0.1042	0.1070	0.1096	0.1121	0.1144	0.1167	0.1187	0.1207	0.1224	0.1241
10	0.0740	0.0770	0.0800	0.0829	0.0858	0.0887	0.0914	0.0941	0.0967	0.0993

TABLA 3
Probabilidades de Poisson

Continuación...

					μ					
x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
11	0.0478	0.0504	0.0531	0.0558	0.0585	0.0613	0.0640	0.0667	0.0695	0.0722
12	0.0283	0.0303	0.0323	0.0344	0.0366	0.0388	0.0411	0.0434	0.0457	0.0481
13	0.0154	0.0168	0.0181	0.0196	0.0211	0.0227	0.0243	0.0260	0.0278	0.0296
14	0.0078	0.0086	0.0095	0.0104	0.0113	0.0123	0.0134	0.0145	0.0157	0.0169
15	0.0037	0.0041	0.0046	0.0051	0.0057	0.0062	0.0069	0.0075	0.0083	0.0090
16	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0030	0.0033	0.0037	0.0041	0.0045
17	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0012	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021
18	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
19	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
20	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001

					μ					
x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0017	0.0016	0.0014	0.0013	0.0012	0.0011
2	0.0100	0.0092	0.0086	0.0079	0.0074	0.0068	0.0063	0.0058	0.0054	0.0050
3	0.0269	0.0252	0.0237	0.0222	0.0208	0.0195	0.0183	0.0171	0.0160	0.0150
4	0.0544	0.0517	0.0491	0.0466	0.0443	0.0420	0.0398	0.0377	0.0357	0.0337
5	0.0882	0.0849	0.0816	0.0784	0.0752	0.0722	0.0692	0.0663	0.0635	0.0607
6	0.1191	0.1160	0.1128	0.1097	0.1066	0.1034	0.1003	0.0972	0.0941	0.0911
7	0.1378	0.1358	0.1338	0.1317	0.1294	0.1271	0.1247	0.1222	0.1197	0.1171
8	0.1395	0.1392	0.1388	0.1382	0.1375	0.1366	0.1356	0.1344	0.1332	0.1318
9	0.1256	0.1269	0.1280	0.1290	0.1299	0.1306	0.1311	0.1315	0.1317	0.1318
10	0.1017	0.1040	0.1063	0.1084	0.1104	0.1123	0.1140	0.1157	0.1172	0.1186
11	0.0749	0.0776	0.0802	0.0828	0.0853	0.0878	0.0902	0.0925	0.0948	0.0970
12	0.0505	0.0530	0.0555	0.0579	0.0604	0.0629	0.0654	0.0679	0.0703	0.0728
13	0.0315	0.0334	0.0354	0.0374	0.0395	0.0416	0.0438	0.0459	0.0481	0.0504
14	0.0182	0.0196	0.0210	0.0225	0.0240	0.0256	0.0272	0.0289	0.0306	0.0324
15	0.0098	0.0107	0.0116	0.0126	0.0136	0.0147	0.0158	0.0169	0.0182	0.0194
16	0.0050	0.0055	0.0060	0.0066	0.0072	0.0079	0.0086	0.0093	0.0101	0.0109
17	0.0024	0.0026	0.0029	0.0033	0.0036	0.0040	0.0044	0.0048	0.0053	0.0058
18	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0029

TABLA 3

Probabilidades de Poisson

Continuación.

	μ									
x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
19	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014
20	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006
21	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

	μ									
x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
2	0.0046	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025	0.0023
3	0.0140	0.0131	0.0123	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087	0.0081	0.0076
4	0.0319	0.0302	0.0285	0.0269	0.0254	0.0240	0.0226	0.0213	0.0201	0.0189
5	0.0581	0.0555	0.0530	0.0506	0.0483	0.0460	0.0439	0.0418	0.0398	0.0378
6	0.0881	0.0851	0.0822	0.0793	0.0764	0.0736	0.0709	0.0682	0.0656	0.0631
7	0.1145	0.1118	0.1091	0.1064	0.1037	0.1010	0.0982	0.0955	0.0928	0.0901
8	0.1302	0.1286	0.1269	0.1251	0.1232	0.1212	0.1191	0.1170	0.1148	0.1126
9	0.1317	0.1315	0.1311	0.1306	0.1300	0.1293	0.1284	0.1274	0.1263	0.1251
10	0.1198	0.1210	0.1219	0.1228	0.1235	0.1241	0.1245	0.1249	0.1250	0.1251
11	0.0991	0.1012	0.1031	0.1049	0.1067	0.1083	0.1098	0.1112	0.1125	0.1137
12	0.0752	0.0776	0.0799	0.0822	0.0844	0.0866	0.0888	0.0908	0.0928	0.0948
13	0.0526	0.0549	0.0572	0.0594	0.0617	0.0640	0.0662	0.0685	0.0707	0.0729
14	0.0342	0.0361	0.0380	0.0399	0.0419	0.0439	0.0459	0.0479	0.0500	0.0521
15	0.0208	0.0221	0.0235	0.0250	0.0265	0.0281	0.0297	0.0313	0.0330	0.0347
16	0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0157	0.0168	0.0180	0.0192	0.0204	0.0217
17	0.0063	0.0069	0.0075	0.0081	0.0088	0.0095	0.0103	0.0111	0.0119	0.0128
18	0.0032	0.0035	0.0039	0.0042	0.0046	0.0051	0.0055	0.0060	0.0065	0.0071
19	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0031	0.0034	0.0037
20	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019
21	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
22	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
23	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

TABLA 4
Probabilidades acumuladas de Poisson

μ

x	0.005	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.9950	0.9900	0.9802	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	0.9324	0.9231	0.9139
1	1.0000	1.0000	.9998	.9996	.9992	.9988	.9983	.9977	.9970	.9962
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999

μ

x	.10	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19
0	.9048	.8958	.8869	.8781	.8694	.8607	.8521	.8437	.8353	.8870
1	.9953	.9944	.9934	.9922	.9911	.9898	.9885	.9871	.9856	.9841
2	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9995	.9994	.9993	.9992	.9990
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

μ

x	.20	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29
0	.8187	.8106	.8025	.7945	.7866	.7788	.7711	.7634	.7558	.7483
1	.9825	.9808	.9791	.9773	.9754	.9735	.9715	.9695	.9674	.9653
2	.9989	.9987	.9985	.9983	.9981	.9978	.9976	.9973	.9970	.9967
3	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9998	.9998
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

μ

x	.30	.32	.34	.36	.38	.40	.42	.44	.46	.48
0	.7408	.7261	.7118	.6977	.6839	.6703	.6570	.6440	.6313	.6188
1	.9631	.9585	.9538	.9488	.9437	.9384	.9330	.9274	.9217	.9158
2	.9964	.9957	.9949	.9940	.9931	.9921	.9910	.9898	.9885	.9871
3	.9997	.9997	.9996	.9995	.9994	.9992	.9991	.9989	.9987	.9985
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

TABLA 4
Probabilidades acumuladas de Poisson

Continuación..

					μ					
x	.50	.55	.60	.65	.70	.7	.80	.85	.90	.95
0	.6065	.5769	.5488	.5220	.4966	.4724	.4493	.4274	.4066	.3867
1	.9098	.8943	.8781	.8614	.8442	.8266	.8088	.7907	.7725	.7541
2	.9856	.9815	.9769	.9717	.9659	.9595	.9526	.9451	.9371	.9287
3	.9982	.9975	.9966	.9956	.9942	.9927	.9909	.9889	.9865	.9839
4	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989	.9986	.9982	.9977	.9971
5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9997	.9995
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999

					μ					
x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
0	.3679	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496
1	.7358	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4337
2	.9197	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037
3	.9810	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747
4	.9963	.9946	.9923	.9893	.9857	.9814	.9763	.9704	.9636	.9559
5	.9994	.9990	.9985	.9978	.9968	.9955	.9940	.9920	.9896	.9868
6	.9999	.9999	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987	.9981	.9974	.9966
7	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 4
Probabilidades acumuladas de Poisson

Continuación...

					μ					
x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2,8	2.9
O	.1353	.1225	.1108	.1003	:0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550
1	.4060	.3796	.3546	.3309	.3084	.2873	.2674	,2487	.2311	.2146
2	.6767	.6496	.6227	.5960	.5697	.5438	.5184	.4936	.4695	.4460
3	.8571	.8386	.8194	.7993	.7787	.7576	.7360	.7141	.6919	.6696
4	.9473	.9379	.9275	.9162	.9041	.8912	.8774	.8629	.8477	.8318
5	.9834	.9796	.9751	.9700	.9643	.9580	.9510	.9433	.9349	.9258
6	,9955	.9941	.9925	.9906	.9884	.9858	.9828	.9794	.9756	.9713
7	.9989	.9985	.9980	.9974	.9967	.9958	.9947	.9934	.9919	.9901
8	.9998	.9997	,9995	.9994	.9991	.9989	.9985	.9981	.9976	.9969
9	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	,9999	.9999	.9998	.9998
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

					μ					
x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
O	.0498	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202
1	.1991	.1847	.1712	.1586	.1468	.1359	.1257	.1162	.1074	.0992
2	.4232	.4012	.3799	.3594	.3397	.3208	,3027	.2854	.2689	.2531
3	.6472	.6248	.6025	.5803	.5584	.5366	.5152	.4942	.4735	.4532
4	.8153	.7982	.7806	.7626	.7442	.7254	.7064	.6872	.6678	.6484
5	.9161	.9057	.8946	.8829	.8705	.8576	.8441	.8301	.8156	.8006
6	.9665	.9612	.9554	.9490	.9421	.9347	.9267	.9182	.9091	.8995
7	.9881	.9858	.9832	.9802	.9769	.9733	.9692	.9648	.9599	.9546
8	.9962	.9953	,9943	.9931	.9917	.9901	.9883	.9863	.9840	.9815
9	.9989	.9986	.9982	.9978	.9973	.9967	.9960	.9952	.9942	.9931
10	.9997	.9996	.9995	.9994	.9992	.9990	.9987	,9984	.9981	.9977
11	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9995	.9994	.9993
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 4

Probabilidades acumuladas de Poisson

Continuación...

	μ									
x	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8
O	.0183	.0150	.0123	.0101	.0082	.0067	.0055	.0045	.0037	.0030
1	.0916	.0780	.0663	.0563	.0477	.0404	.0342	.0289	.0244	.0206
2	.2381	.2102	.1851	.1626	.1425	.1247	.1088	.0948	.0824	.0715
3	.4335	.3954	.3594	.3257	.2942	.2650	.2381	.2133	.1906	.1700
4	.6288	.5898	.5512	.5132	.4763	.4405	.4061	.3733	.3421	.3127
5	.7851	.7531	.7199	.6858	.6510	.6160	.5809	.5461	.5119	.4783
6	.8893	.8675	.8436	.8180	.7908	.7622	.7324	.7017	.6703	.6384
7	.9489	.9361	.9214	.9049	.8867	.8666	.8449	.8217	.7970	.7710
8	.9786	.9721	.9642	.9549	.9442	.9319	.9181	.9026	.8857	.8672
9	.9919	.9889	.9851	.9805	.9749	.9682	.9603	.9512	.9409	.9292
10	.9972	.9959	.9943	.9922	.9896	.9863	.9823	.9775	.9718	.9651
11	.9991	.9986	.9980	.9971	.9960	.9945	.9927	.9904	.9875	.9840
12	.9997	.9996	.9993	.9990	.9986	.9980	.9972	.9962	.9949	.9932
13	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995	.9993	.9990	.9986	.9980	.9973
14	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995	.9993	.9990
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998	.9996
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 4
Probabilidades acumuladas de Poisson

Continuación...

	μ									
x	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8
0	.0025	.0020	.0017	.0014	.0011	.0009	.0007	.0006	.0005	.0004
1	.0174	.0146	.0123	.0103	.0087	.0073	.0061	.0051	.0043	.0036
2	.0620	.0536	.0463	.0400	.0344	.0296	.0255	.0219	.0188	.0161
3	.1512	.1342	.1189	.1052	.0928	.0818	.0719	.0632	.0554	.0485
4	.2851	.2592	.2351	.2127	.1920	.1730	.1555	.1395	.1249	.1117
5	.4457	.4141	.3837	.3547	.3270	.3007	.2759	.2526	.2307	.2103
6	.6063	.5742	.5423	.5108	.4799	:4497	.4204	.3920	.3646	.3384
7	.7440	.7160	.6873	.6581	.6285	.5987	.5689	.5393	.5100	.4812
8	.8472	.8259	.8033	.7796	.7548	.7291	.7027	.6757	.6482	.6204
9	.9161	.9016	.8858	.8686	.8502	.8305	.8096	.7877	.7649	.7411
10	.9574	.9486	.9386	.9274	.9151	.9015	.8867	.8707	.8535	.8352
11	.9799	.9750	.9693	.9627	.9552	.9466	.9371	.9265	.9148	.9020
12	.9912	.9887	.9857	.9821	.9779	.9730.	.9673	.9609	.9536	.9454
13	.9964	.9952	.9937	.9920	.9898	.9872	.9841	.9805	.9762	.9714
14	.9986	.9981	.9974	.9966	.9956	.9943	.9927	.9908	.9886	.9859
15	.9995	.9993	.9990	.9986	.9982	.9976	.9969	.9959	.9948	.9934
16	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9990	.9987	.9983	.9978	.9971
17	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991	.9988
18	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 4

Probabilidades acumuladas de Poisson

Continuación.

					μ					
x	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5
O	.0003	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0030	.0019	.0012	.0008	.0005	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001
2	.0138	.0093	.0062	.0042	.0028	.0018	.0012	.0008	.0005	.0003
3	.0424	.0301	.0212	.0149	.0103	.0071	.0049	.0034	.0023	.0016
4	.0996	.0744	.0550	.0403	.0293	.0211	.0151	.0107	.0076	.0053
5	.1912	.1496	.1157	.0885	.0671	.0504	.0375	.0277	.0203	.0148
6	.3134	.2562	.2068	.1649	.1301	.1016	.0786	.0603	.0458	.0346
7	.4530	.3856	.3239	.2687	.2202	.1785	.1432	.1137	.0895	.0698
8	.5925	.5231	.4557	.3918	.3328	.2794	.2320	.1906	.1550	.1249
9	.7166	.6530	.5874	.5218	.4579	.3971	.3405	.2888	.2424	.2014
10	.8159	.7634	.7060	.6453	.5830	.5207	.4599	.4017	.3472	.2971
11	.8881	.8487	.8030	.7520	.6968	.6387	.5793	.5198	.4616	.4058
12	.9362	.9091	.8758	.8364	.7916	.7420	.6887	.6329	.5760	.5190
13	.9658	.9486	.9261	.8981	.8645	.8253	.7813	.7330	.6815	.6278
14	.9827	.9726	.9585	.9400	.9165	.8879	.8540	.8153	.7720	.7250
15	.9918	.9862	.9780	.9665	.9513	.9317	.9074	.8783	.8444	.8060
16	.9963	.9934	.9889	.9823	.9730	-.9604	.9441	.9236	.8987	.8693
17	.9984	.9970	.9947	.9911	.9857	.9781	.9678	.9542	.9370	.9158
18	.9993	.9987	.9976	.9957	.9928	.9885	.9823	.9738	.9626	.9481
19	.9997	.9995	.9989	.9980	.9965	.9942	.9907	.9857	.9787	.9694
20	.9999	.9998	.9996	.9991	.9984	.9972	.9953	.9925	.9884	.9827
21	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9993	.9987	.9977	.9962	.9939	.9906
22	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9997	.9994	.9990	.9982	.9970	.9951
23	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9995	.9992	.9985	.9975
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9993	.9988
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9994
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9997
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999

TABLA 5
Probabilidades del área derecha
de la distribución normal

μ

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2257	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936

TABLA 5
Probabilidades del área derecha
de la distribución normal

Continuación.

					μ					
x	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4986	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.5000	0.5000	0.5000
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

BIBLIOGRAFÍA

Berenson L, Mark y Levine M, David, *Estadística para administración,* 2a. edición, Prentice Hall, México, 2001.

Canavos C. George, *Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos,* McGraw-Hill, España, 1988.

Chiang, Alpha, *Métodos fundamentales de economía matemática,* 3a. edición, McGraw-Hill, México, 1987.

De Canales, H. Francisco y otros, *Metodología de la investigación,* Limusa, México, 1986.

Douglas A, Lind y Masón G. Robert, *Estadística para administración y economía,* Alfaomega, Colombia, 2001.

Douglas A, Lind y Masón G. Robert, *Estadística para administración y economía,* McGraw-Hill, México, 2001.

García Pérez, Andrés, *Elementos de método estadístico,* UNAM, México, 1978.

Glass V, Gene y Stanley C., Julián, *Métodos estadísticos aplicados a las ciencias sociales,* Prentice Hall hispanoamericana, México, 1970.

Hildebrand K., David y R. Lyman Ott, *Estadística aplicada a la administración y a la economía,* 3ª edición, Prentice Hall, México, 1998.

Hoel G., Paul y Raymond J. Jessen, *Estadística básica para negocios y economía,* Continental, México, 1983.

Hoel G., Paul, *Introducción a la estadística matemática,* Ariel, México, 1980.

Jonson, Robert, *Estadística elemental. Lo esencial,* Thomson, México, 1998.

Kazmier J. Leonard, *Estadística aplicada a la administración y a la economía,* McGraw-Hill, 3a. edición, México, 2000.

Labastida López Napoleón, *Estadística I,* Instituto Politécnico Nacional, México, 1991.

Levin I., Richard y Rubin S., David, *Estadística para administradores,* Prentice Hall, México, 1996.

Levin, Jack, *Fundamentos de estadística en la investigación social,* Haría, 2a. edición, México, 1976.

Mayes C. Anne y Mayes G. David, *Fundamentos de estadística para economía,* Limusa, México, 1980.

Mendenhall, William, *Introducción a la probabilidad y la estadística,* Iberoamericana, México, 1987.

Murray R., Spiegel, *Estadística: teoría y problemas,* Serie Schaum, México, McGraw Hill. 2a. edición, México, 1993.

Norville M. Docunie y Robert W. Heath, *Métodos estadísticos aplicados,* 5a. edición, Haría, México, 1983.

Peña Sánchez de Rivera, Daniel, *Estadística modelos y métodos: 1. Fundamentos,* Alianza Universidad textos, vol. 1, México, 1972.

Snedecor W. George, *Métodos estadísticos,* Continental, 3a. reimpresión, México, 1975.

Stevenson, J. Williams, *Estadística para administración y economía,* Haría, México, 1981.

Trióla F, Mario, *Estadística elemental,* 7a. edición, Pearson educación, México, 2000.

Walpole E. Ronald y Freund E. John, *Estadística matemática con aplicaciones,* Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1990.

Wayne, W. Daniel, *Estadística con aplicaciones a las ciencias sociales y a la educación,* McGraw-Hill, México, 1988.

Wonnacott H., Thomas, *Fundamentos de estadística para administración y economía,* Limusa, México, 1989.

Estadística descriptiva
del autor Salvador Monroy Saldívar
Editado en la Dirección de Publicaciones
Revillagigedo 83, Col. Centro, CP 06040

Impreso en Cargraphics, SA de CV
Av. Presidente Juárez 2004, Col. Industrial Puente de Vigas,
CP 54090, México, Estado de México
Diciembre de 2008
Producción bajo demanda
en un contrato de mil ejemplares

Cuidado editorial: Teófila Amayo Pérez
Diseño de formación: Guadalupe Villa Ramírez
Diseño de portada: Guadalupe Villa Ramírez
Producción: Sergio Mújica Ramos
Producción editorial: Vania B. Castellanos Contreras
Acabados editoriales: Roberto López Moreno
Procesos editoriales: Manuel Toral Azuela
División editorial: Héctor Bello Ríos
Director: Arturo Salcido Beltrán

Este libro es producto del trabajo cotidiano realizado en las aulas de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional y surge con la idea de producir un material que desarrolle de manera puntual y detallada el contenido de la materia de Estadística Descriptiva que se imparte en el tercer semestre de la Licenciatura en Economía.

Sin embargo, la Estadística Descriptiva se utiliza en diversas áreas del conocimiento y, por tal razón, este material puede ser útil para quienes se interesen en estos temas.

Finalmente conviene mencionar que la idea principal es desarrollar cada tema de forma sencilla y de fácil comprensión para los alumnos sin que esto signifique restarle importancia a las formalizaciones que los temas requieren; además, se hace hincapié en las interpretaciones de los resultados obtenidos.

ISBN:978-970-36-0415-9
9 789703 604159